MATEMÁTICA 4: PRÁCTICA 3

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARITMO

Miércoles 7 de Septiembre de 2022

Argumento

Todo $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$ tiene su argumento: $z = x + iy$

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ cumple

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|};\ \ \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{|z|}$$

θ argumento de $z \iff \theta + 2n\pi$ es un argumento $\forall n \in \mathbb{Z}$
$\Longrightarrow$ el argumento no es único

Ej: • $arg(-\sqrt{3} + i) = \frac{5}{6}\pi + 2n\pi = \frac{17}{6}\pi + 2\tilde{n}\pi \,:\, n, \tilde{n} \in \mathbb{Z}$ etc.

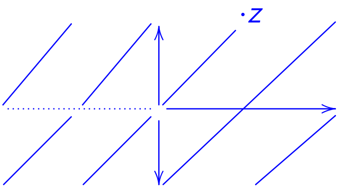
• $arg(1 - i) = -\frac{1}{4}\pi + 2n\pi = \frac{7}{4}\pi + 2\tilde{n}\pi \,:\, n, \tilde{n} \in \mathbb{Z}$ etc.

Ej. 1. $\Omega \subset \mathbb{C}$ = Dominio del Argumento Principal

En el abierto y conexo
$\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0 \;\vee\; y \neq 0\}$ se define
$\Rightarrow$**función argumento principal**

$$Arg : \Omega \to (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$$

$\Omega := \Omega_{-\pi}$



$$Arg(z) = Arg(x + iy) = \theta \in (-\pi, \pi)$$

donde θ es el único número real que cumple

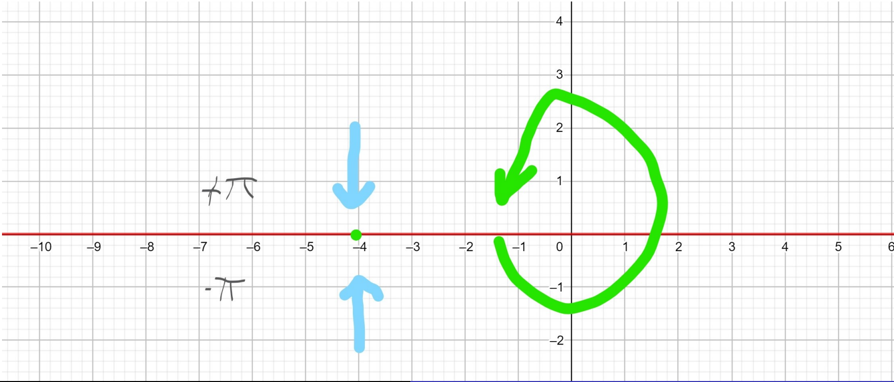
$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} : -\pi < \theta < \pi$$

¿Dónde es continua función la Argumento?

Si se quisiera extender y definir el argumento como función a todo $\mathbb{C}$ menos el cero: $Arg : \mathbb{C} \setminus \{z = 0\} \to (-\pi, +\pi]$

$\Rightarrow$ no es continua sobre la semirrecta $x < 0$

pues, si $x < 0$ y definimos $arg(x) = \pi$, se tienen tan cerca como se quiera, complejos $z = x - i\epsilon$ con $arg(x - i\epsilon) \sim -\pi$



Sea $x < 0$ y definamos $arg(x) = \pi$, entonces no existe el límite de argumento de z cuando $z \to x$:
Si $z = x + it$, entonces

$$\lim_{z \to x} Arg(z) = \lim_{t \to 0^+} Arg(x + it) = Arg(x)$$

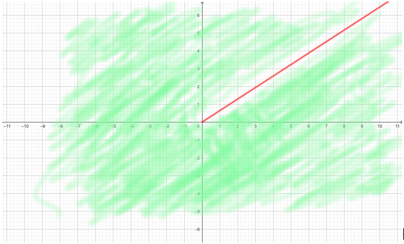
$$= \pi \neq -\pi = \lim_{t \to 0^-} Arg(x + it)$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{z \to x} Arg(z)$$

Otros argumentos

Análogamente, se puede definir una función continua argumento en todo $\mathbb{C}$ menos una semirrecta, es decir

$$arg : \Omega_\alpha = \{z = re^{i\theta} : \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\} \mapsto (\alpha,\ \alpha + 2\pi)$$

 $\mapsto (\alpha,\ \alpha + 2\pi)$

Propiedades de la función Arg principal

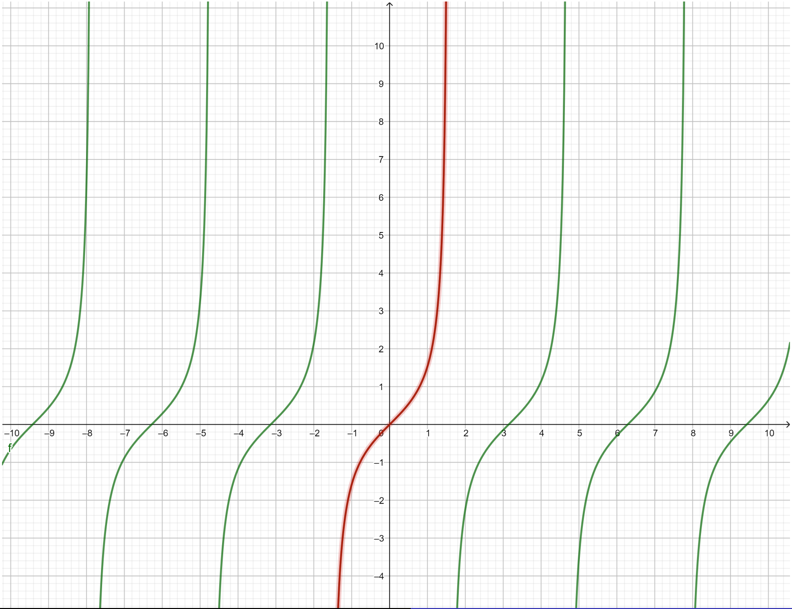
- $Arg : \Omega \to (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$
- *Arg* función continua
- *Arg* no derivable, no holomorfa

Función Tangente: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $y = tan(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)} : \left\{t \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$
- $\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^+} tan(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} tan(t) = +\infty$
- Se restringe el dominio de forma que sea inyectiva:

$y = tan(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

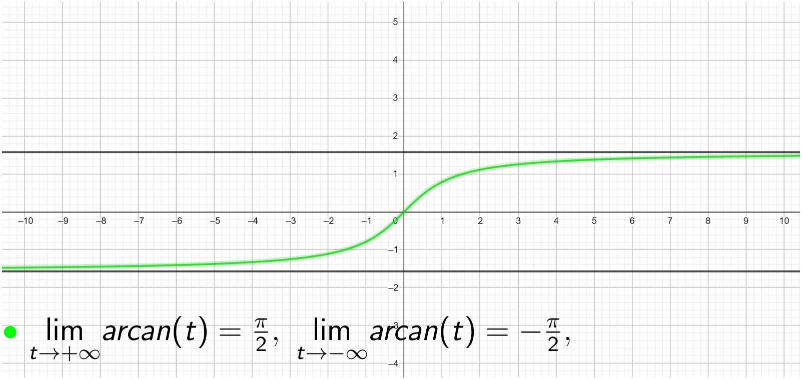
$y = tan(t)$



Función arcotangente: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $s = arctan(t) \iff tan(s) = t$

$$s = arctan(t) : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



- $\lim_{t \to +\infty} arcan(t) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{t \to -\infty} arcan(t) = -\frac{\pi}{2},$

¿Fórmula de la función Argumento?

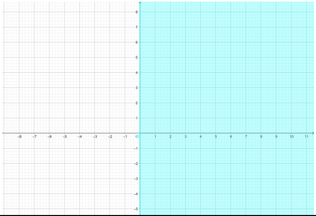
$$Arg(z) = \theta \in (-\pi, \pi)$$

$$\Rightarrow Arg : \Omega \to (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$$

$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ donde $\theta \in \mathbb{R}$ cumple

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|};\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|z|} : -\pi < \theta < \pi \iff tan(\theta) = \frac{y}{x} : x \neq 0$$

Si además $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ entonces $\boxed{\theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$



Fórmula de la función Argumento

$(+)/(-)$	$arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$	$arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$(+)/(+)$
$(-)/(-)$	$arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$	$arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$(-)(+)$

Ej: $(x, y) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow arctan(\frac{y}{x}) + \pi = arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + \pi$

$$= -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi \in (-\pi, \pi)$$

Ej: $(x, y) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) \Rightarrow arctan(\frac{y}{x}) - \pi = arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) - \pi$

$$= \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi \in (-\pi, \pi)$$

Sobre el eje imaginario $y > 0, x = 0$ tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{t \to +\infty} arctan(t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\neq -\frac{\pi}{2} = \lim_{x \to 0^-} arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{t \to -\infty} arctan(t)$$

$\Rightarrow$ Definamos entonces $Arg(iy) = \frac{\pi}{2} : y > 0$

• $arg(z) = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ en cuadrantes I y IV,
•$arg(z) = arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ en el cuadrante II

Para que resulte continua sobre $y < 0, x = 0$, el semieje negativo y:

$$\lim_{x\to 0^+} arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{t\to -\infty} arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\neq +\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to 0^-} arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{t\to +\infty} arctan(t)$$

$\Rightarrow$ Definamos entonces $Arg(iy) = -\frac{\pi}{2},\ y < 0$

- $Arg(z) = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ en cuadrantes I y IV,
- $Arg(z) = arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ en el cuadrante II
- $Arg(z) = arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$ en el cuadrante III

Concluímos que una buena elección de $Dom(Arg) = \Omega$ para que $Arg(z) =$ argumento principal resulte continua es $\Omega_{-\pi} =$ todo $\mathbb{C}$ menos la semirrecta del eje $x \leq 0$

Fórmula de la función Argumento

La **función argumento principal** $Arg(z) = \theta \in (-\pi, \pi)$

$$\Rightarrow Arg : \Omega \to (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$$

coincide con las fórmulas

$$Arg(x + yi) = \begin{cases} arctan\left(\frac{y}{x}\right) & si \quad x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & si \quad x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & si \quad x = 0, y < 0 \\ arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & si \quad x < 0 < y \\ arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & si \quad x, y < 0 \end{cases}$$

Propiedades de e^z

- $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

$$\Longrightarrow |e^z| = e^x; \quad arg(e^z) = y + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}$$

- $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$
- $e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2n\pi i : n \in \mathbb{Z}$
- Corolario: $\Longrightarrow f(z) = e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **no es inyectiva** pues

$$e^z = e^w \Longleftrightarrow w = z + 2n\pi i : \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Demostración:

- $e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2n\pi i : n \in \mathbb{Z}$
  $(\Longleftarrow)$ Si $n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow e^{2n\pi i} = \cos(2n\pi) + i\,\mathrm{sen}(2n\pi) = 1\ \forall n$

  $(\Longrightarrow)$ Si $1 = e^z = e^x \cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)$
  $\Longrightarrow 1 = |e^z| = e^x$ en $\mathbb{R} \Longrightarrow x = 0$

  Por otra parte, el argumento de ambos miembros debe ser el mismo: $2n\pi = arg(1) = arg(e^z) = y \Leftrightarrow y = 2n\pi$

  $$\Leftrightarrow z = 2n\pi i$$

- Corolario: $e^z = e^w \Longleftrightarrow w = z + 2n\pi i : n \in \mathbb{Z}$
  En efecto, $e^z = e^w \Longleftrightarrow 1 = e^{w-z}$

  $$\Longleftrightarrow w - z = 2n\pi i : n \in \mathbb{Z}\ \checkmark$$

Ejercicio 1. a) Analizar la inyectividad de $f(z) = e^z$

Solución: Supongamos que $z = x + iy$, $w = u + iv$, $e^z = e^w$ entonces

$$e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z = e^w = e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v)$$

entonces $|e^z| = |e^w|$ implica

$$e^x = |e^z| = |e^w| = e^u \in \mathbb{R} \iff x = u$$

Además,

$$(\cos y + i \operatorname{sen} y) = (\cos v + i \operatorname{sen} v) \iff v = y + 2n\pi$$

Por lo tanto, $\boxed{e^z = e^w \iff w = z + 2n\pi i}$

$$\Rightarrow e^z \text{ es periódica de período } 2\pi i$$

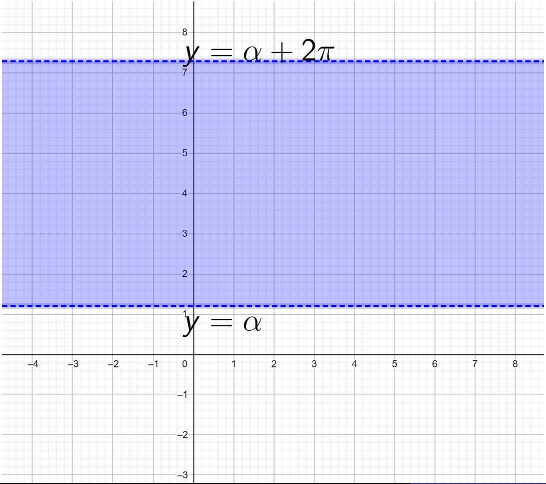
¿Dónde es inyectiva e^z?

- $f(z) = e^z$ es inyectiva en cada franja horizontal abierta de ancho 2π
  $\Longrightarrow e^z$ **inyectiva en**
  $\mathcal{U}_\alpha := \{w \ \in \mathbb{C} : -\alpha < Im(w) < \alpha + 2\pi\}$

  $\Longrightarrow e^z : U_{-\alpha} \to \mathbb{C}$ **es inyectiva**

e^z es inyectiva en cualquier franja abierta horizontal, de ancho 2π:

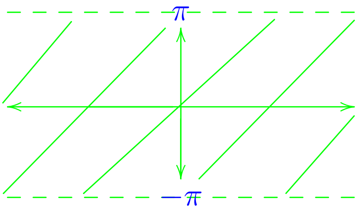
$$U_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < Im(z) < \alpha + 2\pi\}$$



Obtenemos que e^z es inyectiva en el abierto conexo:

$$U_{-\pi} = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < Im(z) < \pi\}$$

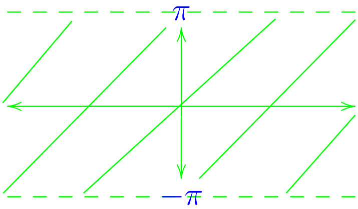
$U_{-\pi}$:



1. b) Calcular la imagen de $U_{-\pi}$ por e^z

e^z es inyectiva en el abierto: $U_{-\pi} = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < Im(z) < \pi\}$

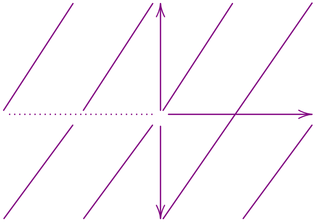
$U_{-\pi}$:



$\cdot z = x + yi$

La imagen de $U_{-\pi}$ es el abierto $\Omega_{-\pi} = \{w : Arg(w) \in (-\pi, \pi)\}$

$\Omega_{-\pi}$



$\cdot e^z = e^x \Big(\cos(y) + i\, \text{sen}(y$

Biyectividad de e^z

Si $z = x + yi \in U \Rightarrow -\pi < y < \pi$

$$\Rightarrow e^z = e^x \underbrace{\Big(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y) \Big)}_{Arg(e^z)=y}$$

$e^z : U_{-\pi} \to \Omega_{-\pi}$ es biyectiva y holomorfa

$$U_{-\pi} = \{z \ \in \mathbb{C} : -\pi < Im(z) < \pi\}$$

$$\mapsto \Omega_{-\pi} = \{w : Arg(w) \in (-\pi, \pi)\}$$

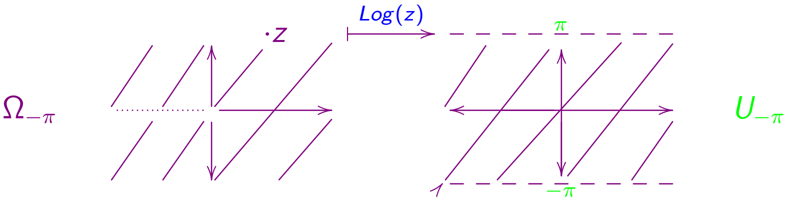
$\Rightarrow e^z$ tiene inversa holomorfa $Log(z)$

Ej 2. Definir la inversa de e^z, la función Log principal y comprobar que es holomorfa

Se define la función logaritmo principal

$$Log(z) = \underbrace{ln|z|}_{parte\ \ real} + i\ \underbrace{Arg(z)}_{parte\ \ imaginaria} \quad : \Omega_{-\pi} \to U_{-\pi}$$

$\Rightarrow$ $Log(z)$ y e^z son una inversa de la otra



$$z = re^{i\theta} \mapsto ln(r) + i\theta, \ \ donde\ Arg(z) = \theta \in (-\pi, \pi)$$

Ejercicio 2. b) Calcular

- $Log(-\sqrt{3}+i) = \ln|-\sqrt{3}+i| + arg(-\sqrt{3}+i)i = \ln 2 + \frac{5}{6}\pi i$
- $Log(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)) = \ln 1 + arg(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i))i = -\frac{1}{4}\pi i$
- Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $Log(z) = r - \frac{3}{4}\pi i : \; r > 0$.

Solución:

$$Log(z) = r - \frac{3}{4}\pi i = \ln|z| + Arg(z)i$$

- Parte real: $\Rightarrow \ln|z| = r \Rightarrow |z| = e^r =: R > 1$
- Parte imaginaria: $\Rightarrow -\frac{3}{4}\pi = Arg(z)$

Por lo tanto,

Solución $= \left\{ z = e^r e^{-\frac{3}{4}\pi i} = -R\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) : R > 1 \right\}$ ✓

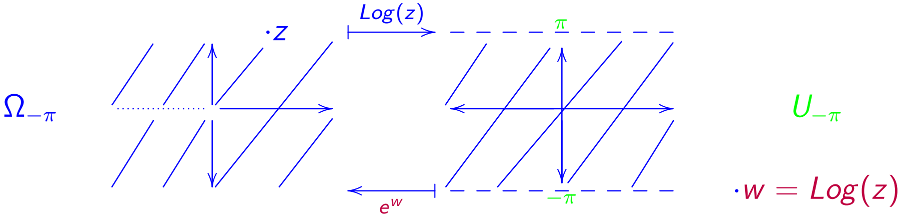
Propiedades de la función Log principal

- $Log : \Omega_{-\pi} \to U_{-\pi}$
- $Log(z) \in \{w \ \in \mathbb{C} : -\pi < Im(w) < \pi\}$

Imagen = franja horizontal abierta de ancho 2π

$$= \{w \ \in \mathbb{C} : -\pi < Im(w) < \pi\} =: \mathcal{U}_{-\pi}$$

- Log holomorfa en Ω con $Log\ '(z) = \dfrac{1}{z}$



$$z = re^{i\theta} \mapsto ln(r) + i\theta, \ donde \ Arg(z) = \theta \in (-\pi, \pi)$$

Ej. 2. c) Probar que Log principal: $\Omega_{-\pi} \to U_{-\pi}$ y e^z son una inversa de la otra

- $z = re^{i\theta} \in \Omega_{-\pi} \Longrightarrow Log(z) = \ln r + i\theta : \theta \in (-\pi, \pi)$

$$\Longrightarrow e^{Log(z)} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} e^{i\theta} = r \cdot e^{i\theta} = z \checkmark$$

- Análogamente, $w = x + iy \in U_{-\pi} \Longrightarrow y \in (-\pi, \pi)$

$$\Longrightarrow |e^w| = e^x; \quad arg(e^w) = y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

$$e^w = e^{x+yi} \Longrightarrow Log(e^w) = \ln(|e^w|) + i\ Arg(e^w) = \ln e^x + i\ y$$

$$= x + iy = w \checkmark$$

donde elegimos $y \in (-\pi, \pi)$ entre todos los valores de $arg(e^w) = y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$ porque aquí

$Arg(z)$ es la función Arg principal $\Rightarrow$ toma un único valor

Atención: El logaritmo como inversa de la exponencial tiene sentido sólo en los dominios restringidos, por lo cual no es útil para encontrar soluciones de ecuaciones.

- Vale siempre $e^{\log(z)} = z \ \forall z \neq 0$ (alguna rama del log)

- No vale en general: $Log(e^z) = z$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$ dado que e^z es periódica, de período $2\pi i$

Contraejemplo: si $z = 2\pi i$ entonces
$Log(e^z) = Log(e^{2\pi i}) = Log(1) = 0 \neq z$

- En general, sólo se puede decir

$$Log(e^z) = z + 2k\pi i : \ k \in \mathbb{Z}$$

2. d) Concluir que $Log\ (z)$ es holomorfa

$Log\ '(z) = \frac{1}{z}\ \forall z \in \Omega_{-\pi}$ y por lo tanto, $Log\ (z)$ es holomorfa en $\Omega_{-\pi}$.

Dem: es consecuencia de que:

- $Log\ (z)$ es continua
- $Log\ (z)$ es la inversa de $f(z) = e^z : U_{-\pi} \to \Omega_{-\pi}$

$\Rightarrow \forall z$ *existe un* $w : z = e^w$

$$\Rightarrow Log\ '(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{Log\ (z) - Log\ (z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\left(\frac{z - z_0}{Log\ (z) - Log\ (z_0)}\right)}$$

$$= \lim_{w \to w_0} \frac{1}{\left(\frac{e^w - e^{w_0}}{Log\ (e^w) - Log\ (e^{w_0})}\right)}$$

$$= \lim_{w \to w_0} \frac{1}{\left(\frac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0}\right)} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}\ \checkmark$$

Ramas de la Función log : $\Omega_\alpha \to \mathbb{C}$

Un dominio abierto y conexo

$$\boxed{\Omega_\alpha = \mathbb{C} \text{ menos la semirrecta } arg(z) = \alpha}$$

sirve de dominio de una función argumento (no principal)

$$arg : \Omega_\alpha \to (\alpha, \alpha + 2\pi) \subset \mathbb{R}$$

dada por

$$arg(z) = arg(x + iy) = \theta \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$$

donde θ es el único número real que cumple

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} : \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$$

Ramas de la Función log : $\Omega_\alpha \to \mathbb{C}$

Ramas del logaritmo

son las distintas funciones logaritmos definidas en cada $\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : arg(z) \neq \alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, z \neq 0\}$:

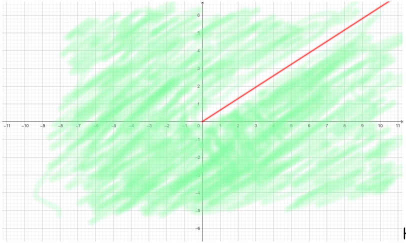
Se elige $arg(z) = \theta \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$ y se define con la misma fórmula una rama del logaritmo $log(z) = ln|z| + i \ arg(z) : \Omega_\alpha \to \mathbb{C}$

$$\Longrightarrow log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta : \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$$

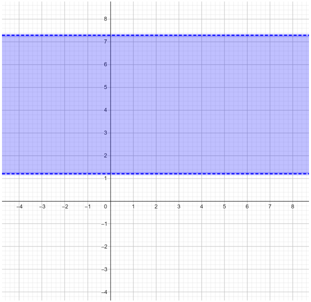
Dos ramas distintas del logaritmo pueden diferir a lo sumo en una constante $2n\pi i : n \in \mathbb{Z}$

$$\Longrightarrow log(z) = Log(z) + 2n\pi i : n \in \mathbb{Z}$$

Una rama del logaritmo $log(z) : \Omega_\alpha \to U_\alpha$



$\mapsto$



$$\Omega_\alpha = \{z = re^{i\theta} : \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\} \mapsto U_\alpha = \{x + yi : \alpha < y < \alpha + 2\pi\}$$

$$log : \Omega_\alpha \mapsto U_\alpha$$

$$z = re^{i\theta} \mapsto ln(r) + i\theta, \ donde \ arg(z) = \theta \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$$

Propiedades de la funciones log complejas

- $log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta : \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$
- $log : \Omega_\alpha \to U_\alpha$
- $log(z) \in U_\alpha := \{w = x + yi \ \in \mathbb{C} : \alpha < y < \alpha + 2\pi\}$

  Imagen $=$ franja horizontal abierta de ancho 2π

- $log\,'(z) = \dfrac{1}{z}$ continua $\Longrightarrow$ log holomorfa en Ω_α
- e^z y log son una inversa de la otra:

  $$e^{log(z)} = z, \ \forall z \in \Omega \qquad y \qquad log(e^w) = w, \ \forall w \in U$$

- $log(z) = Log(z) + 2n\pi i$ ✓

2. e) Mostrar con los sgtes ejemplos que los valores de dos ramas del logaritmo pueden dar valores distintos aún en un dominio común

Calcular 1) $Log(1-\sqrt{3}i$ y 2) $log(1-\sqrt{3}i)$ si en el 2do caso,

$$log(z) = \ln|z| + i\ arg(z) : arg\ (z) \in (0, 2\pi)$$

Solución: 1) $Log(z) = Log$ principal

$$\Rightarrow Log(z) = \ln|z| + i\ Arg(z) : Arg(z) \in (-\pi, \pi)$$

$$\Rightarrow Log\left(1-\sqrt{3}i\right) = \ln 2 - \frac{\pi}{3}i = \ln 2 - \frac{\pi}{3}i\ donde\ \frac{-\pi}{3} \in (-\pi, \pi)$$

2) $log(z) = \ln|z| + i\ arg(z)$ con $arg(z) \in (0, 2\pi)$

$$\Rightarrow log\left(1-\sqrt{3}i\right) = \ln 2 + \frac{5\pi}{3}i = \ln 2 + \frac{5\pi}{3}i\ donde\ \frac{5\pi}{3} \in (0, 2\pi)$$

Práctica 3. Ej 9. c) Definición de $f(z) = z^w$ holomorfa

Sea $w \in \mathbb{C}$ (fijo); en el dominio $\Omega = \Omega_{-\pi} = \{z \in \mathbb{C} : Arg(z) \in (-\pi, \pi)\}$ del logaritmo principal se define la potencia compleja

$f(z) = z^w = e^{w\mathrm{Log}(z)}$ holomorfa por ser composición de holomorfas en Ω, y su derivada es

$$\frac{d(z^w)}{dz} = \frac{d}{dz} e^{w\mathrm{Log}(z)} = z^w \cdot w \cdot \frac{1}{z}$$

$$= z^w \cdot w \cdot z^{-1}$$

$$= w \cdot z^{w-1} \checkmark$$

En particular, se define la función holomorfa raíz cuadrada: $\Omega \to \Omega$: si $z = |z|e^{i\theta}$, con $\theta \in (-\pi, \pi)$

$$\Rightarrow f(z) = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z)}$$

$$= e^{\frac{1}{2}(ln|z|+i\theta)} = e^{ln\left(|z|^{\frac{1}{2}}\right)} e^{\frac{i\theta}{2}}$$

$$= |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Tenemos la función holomorfa
raíz cuadrada: $\Omega \to \Omega$: si $z = |z|e^{i\theta}$, con $\theta \in (-\pi, \pi)$

$$\Rightarrow f(z) = z^{\frac{1}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

También $-f(z) = -z^{\frac{1}{2}} = -|z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$ es holomorfa.

$\Rightarrow \pm f(z)$ son dos ramas de la función raíz cuadrada en Ω.

Si se eligen otros dominios $\Omega_\alpha : \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ se obtienen funciones distintas ✓

Recordemos: Funciones armónicas

Definición: Dado un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice armónica en Ω si h es 2 veces derivable y satisface la ecuación de Laplace $(h_{xx} + h_{yy})(x, y) = 0, \ \forall (x, y) \in \Omega$.

Si $u, v : \Omega \to \mathbb{C}$ son armónicas en Ω y verifican

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$ se dice que v es una conjugada armónica de u

Teorema: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y conexo.

- Si $f(x + yi) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ es holomorfa en Ω y las funciones u, v son de clase C^2 entonces v es una conjugada armónica de u en Ω.

- Recíprocamente, si v es una conjugada armónica de u en Ω entonces $f(x + yi) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ es holomorfa en Ω

Existencia de la conjugada armónica

- Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, simplemente conexo (sin agujeros), $u : \Omega \to \mathbb{C}$ es armónica entonces existe $v : \Omega \to \mathbb{C}$ conjugada armónica de u en Ω

- Si $v : \Omega \to \mathbb{C}$ conjugada armónica de u en Ω entonces $v + c$ también lo es $\forall c \in \mathbb{R}$

Ejercicio 3. Otro camino para definir el Log Principal

Probar que si $u(x, y) = \ln|z|$, entonces $v(x, y) = Arg(z)$ es una conjugada armónica de u en $\Omega_{-\pi}$

Idea de la Solución:

$$\{v(x, y) = Arg(z) + c : c \in \mathbb{R}\}$$

Si $c = 0$, $v(x, y) = Arg(z)$ es conjugada armónica de $u(x, y) = \ln|z|$ en el dominio simplemente conexo $\Omega_{-\pi}$ $\Rightarrow$ obtenemos una función holomorfa que llamamos Logaritmo principal

$$Log(z) = \underbrace{ln|z|}_{parte\ \ real} + i \underbrace{Arg(z)}_{parte\ \ imaginaria} : \Omega_{-\pi} \to U_{-\pi}$$

La elección de la constante anterior se hace con la condición de que $Log(z)$ y e^z sean una inversa de la otra ✓

Desarrollo del Ej. 3. Ln(r) es armónica: $\nabla^2 = 0$

Probar que $u(x,y) = \frac{1}{2} ln\left(x^2 + y^2\right)$ es armónica en $z \neq 0, \ z \in \mathbb{C}$ y calcular todas sus conjugadas armónicas.
¿Cuál es el dominio más grande de una conjugada armónica de u?

Solución: Veamos que $u(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2}$ es armónica:

- $u_x(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \ u_y(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

- $u_{xx}(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \ u_{yy}(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$\Rightarrow u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Busquemos una conjugada armónica $v(x, y)$

- Por Cauchy - Riemann, v debe cumplir: $u_x = v_y, \; u_y = -v_x$,

donde

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

luego, integrando,

$$v(x, y) = \int v_y(x, y)dy = \int u_x(x, y)dy = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy =$$

$$= \int \frac{1}{x} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]} dy = arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c(x) :$$

$$\text{sólo si } x \neq 0, \; arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \checkmark$$

Obtenemos todas las conjugadas armónicas $v(x, y)$

Ahora la 2da identidad de Cauchy - Riemann: $u_y = -v_x$, donde

$$u_y = \frac{\partial}{\partial y} ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$= -v_x$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c(x)\right] = +\frac{y}{x^2+y^2} + c'(x) \Rightarrow c'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{v(x,y) = arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c : c \in \mathbb{R}, x \neq 0\right\}$$

Se obtiene una función $f(z) = u + iv$ holomorfa

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$= ln\sqrt{x^2 + y^2} + i\,arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

Notar que: en el semiplano $x > 0$ tenemos

$$Arg(x + yi) = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

entonces en el semiplano $x > 0$ elijamos $c = 0$:

$$\boxed{f(z) = \underbrace{ln|z|}_{u(x,y)} + i\ \underbrace{Arg(z)}_{v(x,y)}}$$

$f(z) = u + iv$ es holomorfa

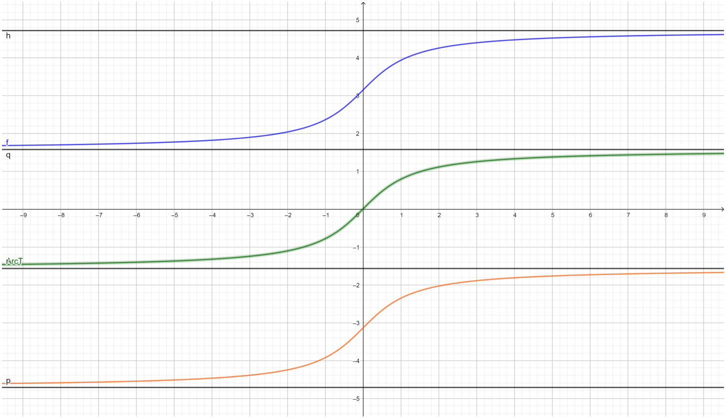
Obtenemos entonces una función holomorfa $f(z) = u + iv$

$$= \underbrace{ln|z|}_{parte\ \ real} + i \underbrace{Arg(z)}_{parte\ \ imaginaria}$$

Esta función en el semiplano $x > 0$ es conocida como:
función logaritmo principal

$$Log(z) = \underbrace{ln|z|}_{parte\ \ real} + i \underbrace{Arg(z)}_{parte\ \ imaginaria} \quad : \Omega_{-\pi} \rightarrow U_{-\pi}$$

Además, sabemos que v se puede extender a todo $\Omega_{-\pi}$ por ser simplemente conexo



$$Arctan(t) + \pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$Arctan(t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$Arctan(t) - \pi \in \left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$$

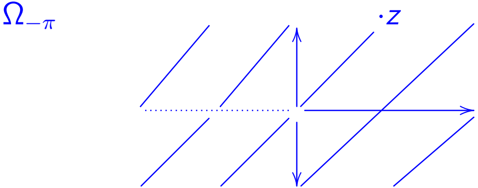
La conjugada armónica es única, salvo constante, en cada dominio simplemente conexo

Pero en cada una de las dos componentes conexas, se pueden elegir constantes distintas: $\Rightarrow$ Definamos entonces

- $arg(z) = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ en cuadrantes I y IV,
- $arg(z) = arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ en el cuadrante II
- $arg(z) = arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$ en el cuadrante III

Concluímos que una buena elección de $v(x, y)$ que resulte continua en todo $\mathbb{C}$ menos la semirrecta del eje $x \leq 0$ es la

función argumento principal $= \theta \in (-\pi, \pi)$ ✓



• La existencia de la conjugada armónica sólo está asegurada en un dominio simplemente conexo

• En particular, no existe una conjugada armónica continua en todo $\mathbb{C} \setminus \{z_0 = 0\}$ de $u(x, y) = ln\sqrt{x^2 + y^2}$
dado que $\mathbb{C} \setminus \{z_0 = 0\}$ no es simplemente conexo

• El dominio más grande donde se puede definir una conjugada armónica continua de $u(x, y) = ln\sqrt{x^2 + y^2}$ es todo $\mathbb{C}$ menos una semirrecta que empiece en $z = 0$
$\Rightarrow$ se puede definir una conjugada armónica continua de $u(x, y)$ en $\Omega_{-\pi} = \mathbb{C} \setminus \{-r \leq 0 : r \in (0, +\infty)\}$

Por lo tanto, $v(x,y) = Arg(z)$ es conjugada armónica de $u(x,y) = \ln|z|$ en el dominio simplemente conexo $\Omega_{-\pi}$
$\Rightarrow$ obtenemos una función holomorfa que llamamos

función logaritmo principal

$$Log(z) = \underbrace{ln|z|}_{parte\ \ real} + i \underbrace{Arg(z)}_{parte\ \ imaginaria} : \Omega_{-\pi} \to U_{-\pi}$$

La elección de la constante anterior se hace con la condición de que

$Log(z)$ y e^z sean una inversa de la otra

Log (z) es holomorfa

Además, sabemos por Cauchy - Riemann que si $z = x + yi$

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$$

Y ya calculamos las derivadas parciales

$$\boxed{u_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},\ u_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{v_x(x,y) = -u_y(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}}$$

Entonces

$$\boxed{Log'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)}$$

$$\boxed{= \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z} \checkmark}$$

Log (z) es holomorfa

Acabamos de obtener que $Log(z)$ es derivable con derivada

$$Log\ '(z) = \frac{1}{z}$$

que es continua para todo $z \neq 0$

$\Rightarrow$ es continua en todo $\Omega_{-\pi}$ (que no contiene al cero)

Por lo tanto, $Log\ (z)$ es holomorfa en $\Omega_{-\pi}$ ✓

Práctica 3, ejercicio 16. Probar que si $f(z)\overline{f(z)} \neq 0$ entonces $g(z) = \ln|f|$ es armónica

Solución: $\ln|f|$ es la parte real de la función holomorfa $Log(f(z))$, por lo tanto es armónica ✓