MATEMÁTICA 4

PRÁCTICA 8: Series de Fourier

Patricia Jancsa

- Serie de Fourier Trigonométrica
- Pág. 5, Ej 1. $f(x)$ partida
- Pág. 14, Series de f par o impar
- Pág. 23, Ej. 2. Onda Cuadrada
- Pág. 25, Animación
- Pág. 40, Ej 3. $f(x) = x(\pi - x)$ como f impar
- Pág. 47, Ej 4. $f'(x) = \pi - 2x$ como f par
- Pág. 53, Teoremas
- Pág. 55, Series de Fourier Exponenciales
- Pág. 79. Continuación Miércoles 9/11/2022

Serie de Fourier Trigonométrica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave a trozos, periódica de período $2L$, tal que existen los límites laterales de f y f' en cada punto de discontinuidad $f(x^+)$, $f(x^-)$, $f'(x^+)$, $f'(x^-)$ (en este caso, f es de cuadrado integrable); su Serie de Fourier Trigonométrica está dada por

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

donde los coeficientes se calculan en la forma:

$\bullet a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$ $\quad \bullet a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \; n \geq 1$

$\bullet b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \; n \geq 1$

Convergencia Puntual

La serie de Fourier converge en todo $\mathbb{R}$ al valor promedio de los límites laterales en cada punto

$$SF[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \quad = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particular, en cada punto donde f es continua, la serie de Fourier converge a $f(x)$, es decir,

$$SF[f](x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x) : f \text{ continua en } x$$

Identidades Trigonométricas

$$\boxed{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}}$$

$$\boxed{\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}}$$

$$\boxed{\cos(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x-y)}{2}}$$

Ejercicio 1

a) Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la función periódica de período 2π dada por

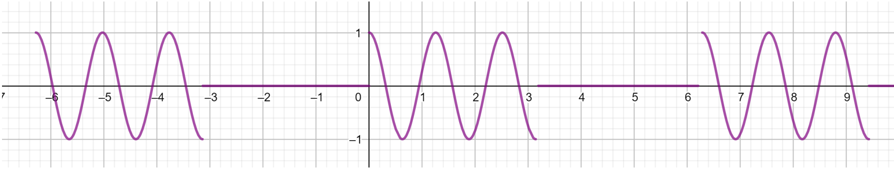
$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi \leqslant x < 0 \\ \cos(5x) & si \quad 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$$

Graficar f. Determinar el valor al cual converge la serie de Fourier de f en cada x donde f no es continua.

b) Utilizar la serie para evaluar

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 25)^2}$$

Solución: f no es par, no es impar



$$\bullet a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\bullet a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \ \ n \geq 1$$

$$\bullet b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx, \ \ n \geq 1$$

$$\bullet a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(5x)\,dx = \frac{1}{5\pi}\,\mathrm{sen}(5x)\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\bullet a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(5x)\cos(nx)\,dx,\ \ n \geqslant 1$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{sen}((n-5)x)}{(n-5)} + \frac{\mathrm{sen}((n+5)x)}{(n+5)}\right]\Bigg|_0^{\pi} = 0,\ \ n \neq 5$$

$$\bullet a_5 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(5x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1+\cos(10x))\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\left[x + \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}(10x)\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(5x)\,\mathrm{sen}(nx)dx,\;\; n \geqslant 1$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{\cos((n-5)x)}{(n-5)} + \frac{\cos((n+5)x)}{(n+5)}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{\overbrace{\cos((n-5)\pi) - \cos(0)}^{-(-1)^n-1}}{(n-5)} + \frac{\overbrace{\cos((n+5)\pi) - \cos(0)}^{-(-1)^n-1}}{(n+5)}\right],\;\; n \neq 5$$

$$= \frac{+1}{2\pi}\left[(-1)^n + 1\right]\frac{(n+5+n-5)}{(n^2-25)}$$

Conclusión: b_n

$$\Rightarrow b_n = \begin{cases} 0 & si \quad n\ impar,\ n \neq 5 \\ \dfrac{1}{\pi}\dfrac{2n}{(n^2-25)} = \dfrac{4k}{\pi(4k^2-25)} & si \quad n\ par,\ n = 2k \end{cases}$$

$$\bullet b_5 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(5x)\,\mathrm{sen}(5x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{10}\,\mathrm{sen}^2(5x)\Big|_0^{\pi} = 0$$

Las primitivas tienen fórmulas distintas

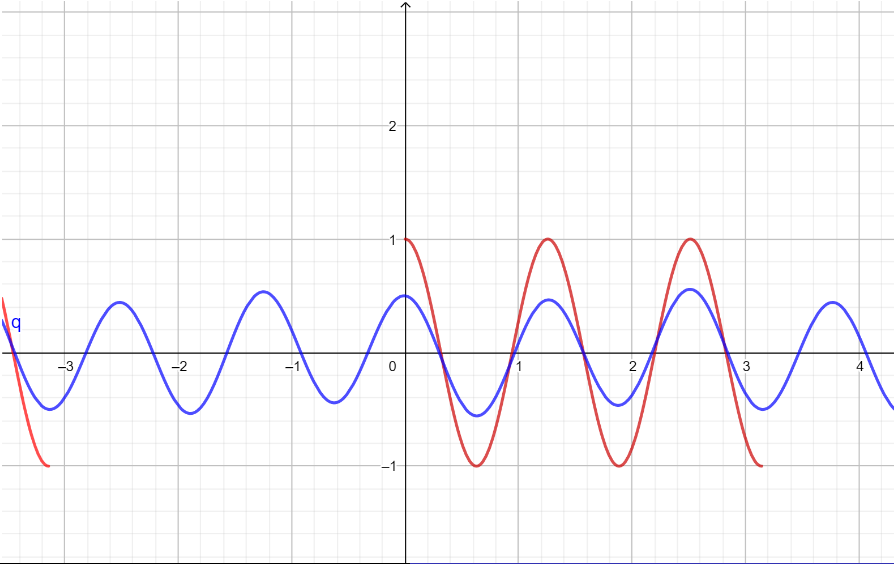
para $n = 5$ y para $n \neq 5$:

$$a_n = 0 \ \forall n \neq 5, \quad a_5 = \frac{1}{2}$$

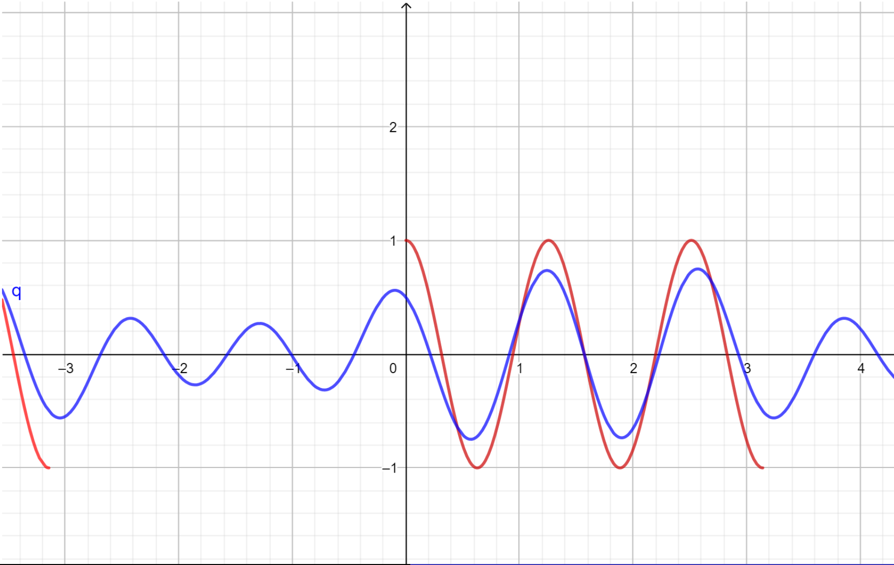
$$b_5 = 0, \quad b_{2k} = \frac{4k}{\pi(4k^2 - 25)}, \quad b_n = 0 \ \forall n \ impar$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \sim \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 25} \operatorname{sen}(2kx)}$$

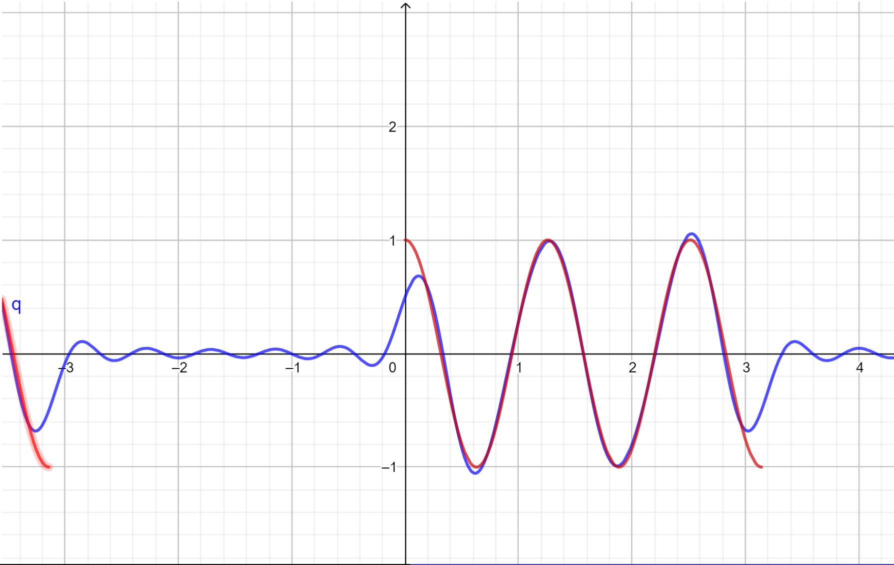
$S_1(x) = \frac{1}{2}\cos(5x)$



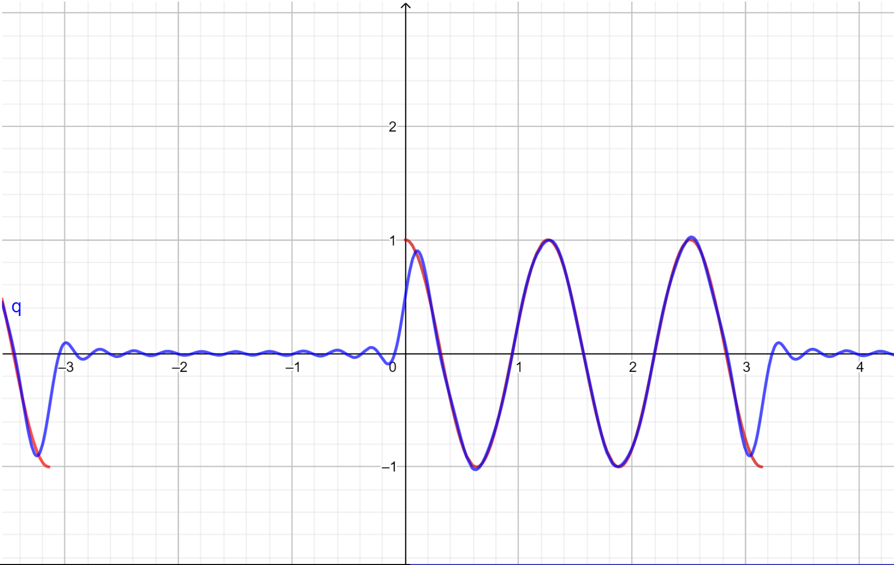
$$S_2(x) = \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\frac{1}{4-25}\,\mathrm{sen}(2x)$$



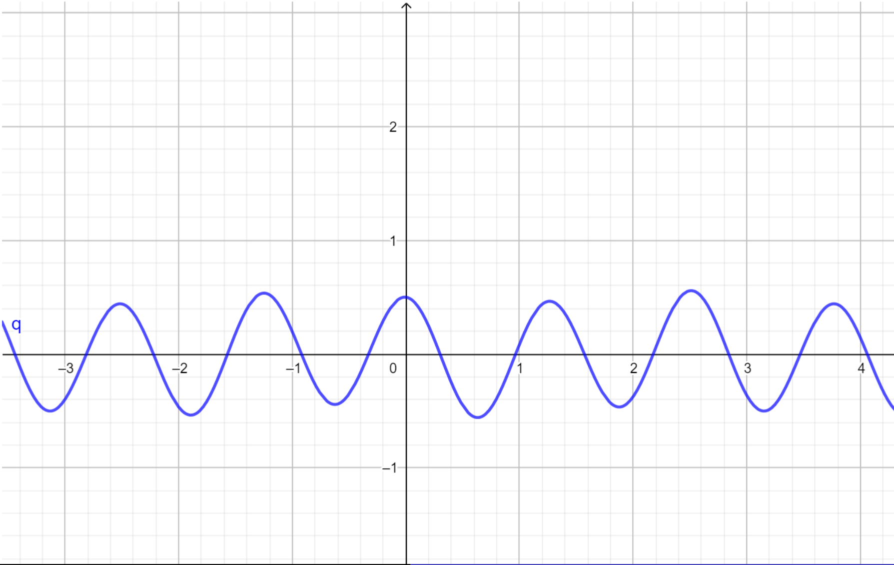
$S_5(x) = \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{5} \frac{k}{4k^2-25}\,\mathrm{sen}(2kx)$



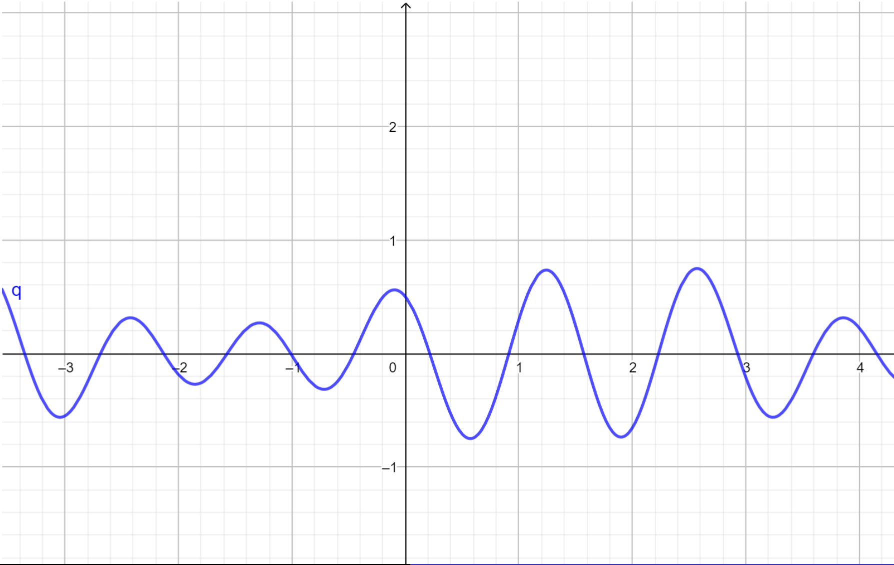
$$S_{10}(x) = \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{4k^2-25}\,\mathrm{sen}(2kx)$$



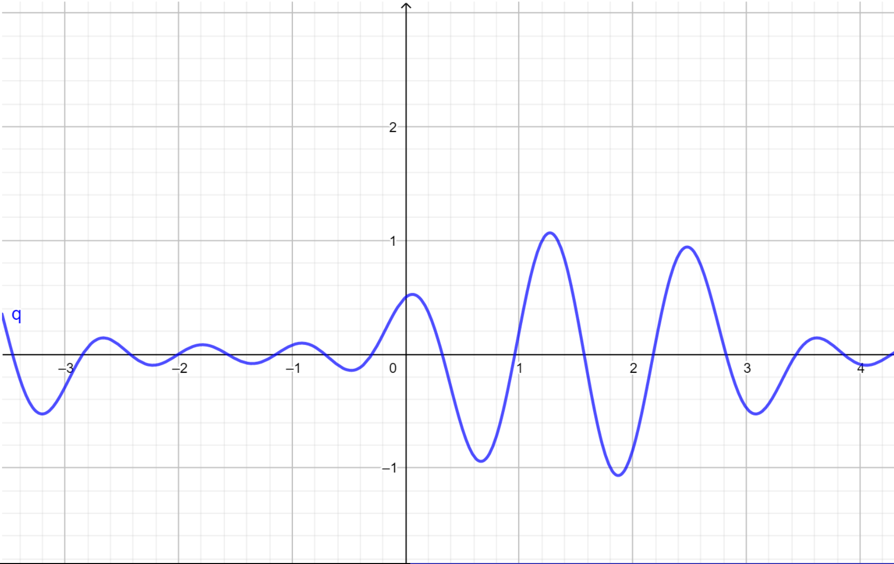
$S_1(x) = \frac{1}{2}\cos(5x)$



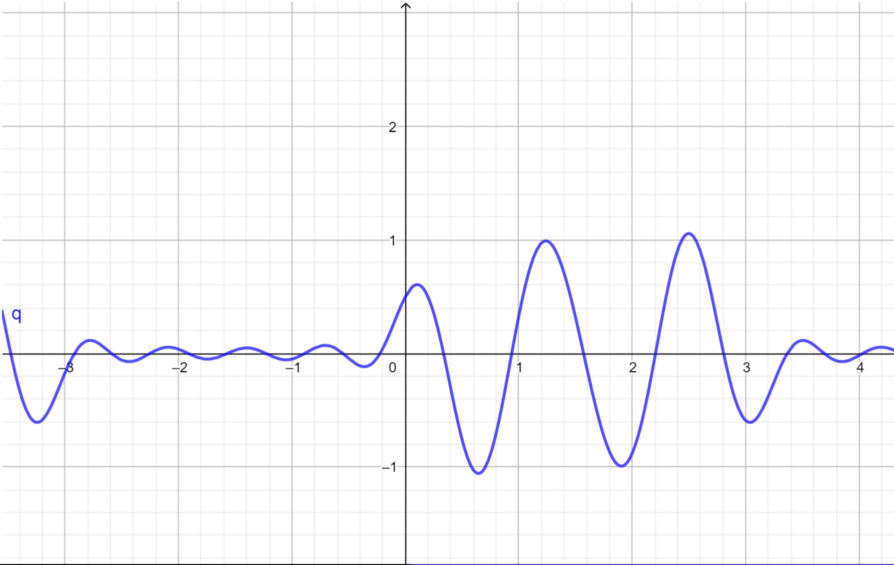
$S_2(x) = \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\frac{1}{4-25}\operatorname{sen}(2x)$



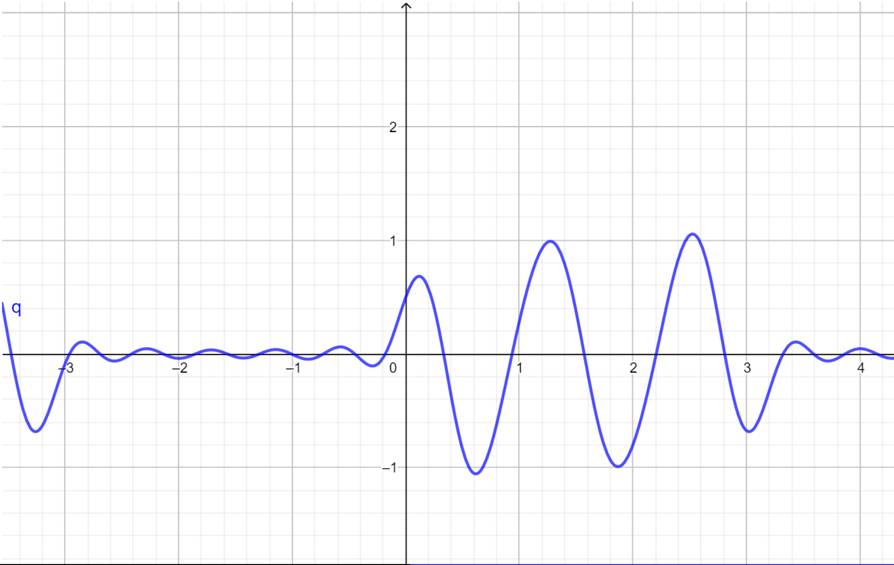
$$S_3(x) = \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{4-25}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{2}{9}\,\mathrm{sen}(4x)\right]$$



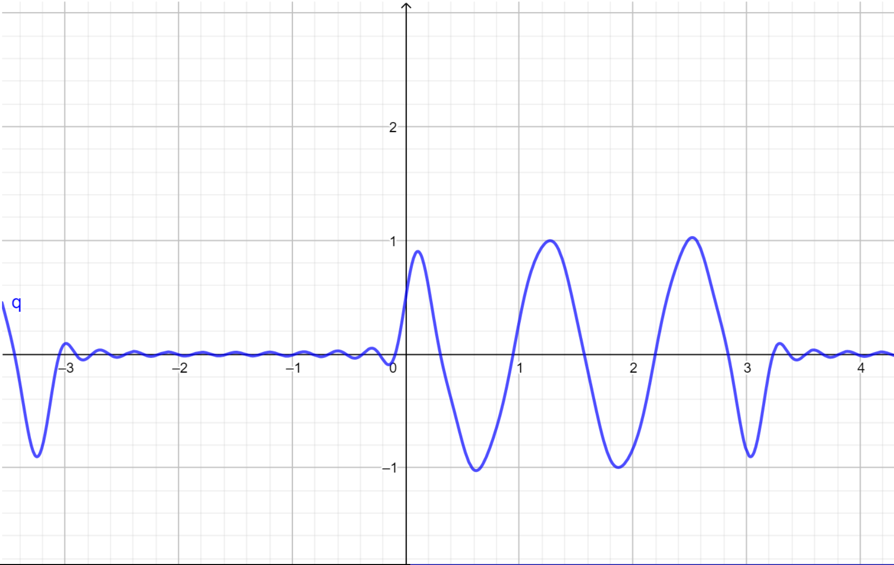
$$S_4(x) = \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{4} \frac{k}{4k^2-25}\,\mathrm{sen}(2kx)$$



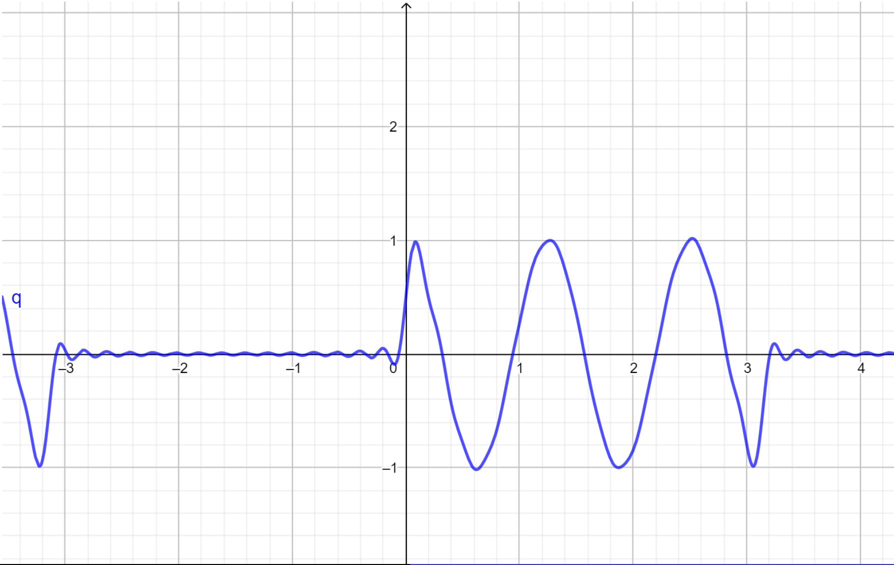
$$S_5(x) = \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{5} \frac{k}{4k^2-25}\,\mathrm{sen}(2kx)$$



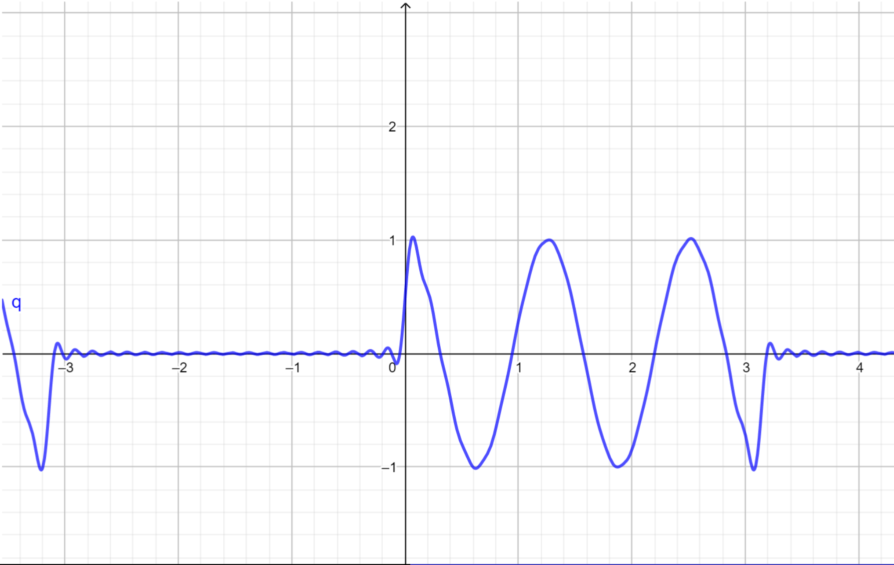
$S_{10}(x) = \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{4k^2-25}\,\mathrm{sen}(2kx)$



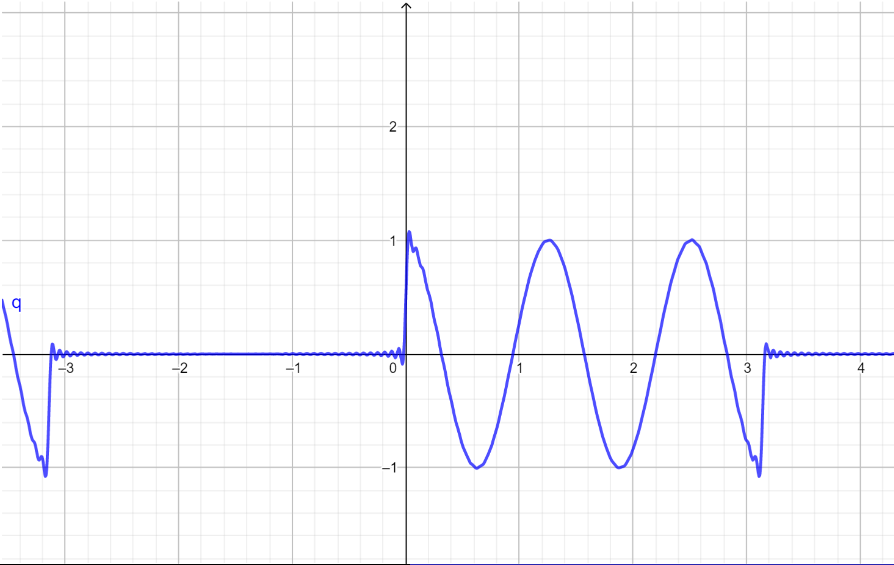
$$S_{15}(x) = \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{15} \frac{k}{4k^2-25}\,\mathrm{sen}(2kx)$$



$$S_{20}(x) = \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{20} \frac{k}{4k^2-25}\,\mathrm{sen}(2kx)$$



$$S_{50}(x) = \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{50} \frac{k}{4k^2-25}\,\mathrm{sen}(2kx)$$



Discontinuidades de f

Además, f no es continua en $x = 2n\pi$:

$$\bullet \mathrm{SF}(f)(2n\pi) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1}{2}$$

Análogamente, f no es continua en $x = (2n+1)\pi$:

$$\bullet \mathrm{SF}(f)((2n+1)\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = -\frac{1}{2}$$

- Para todo $x \neq n\pi$, la serie de Fourier converge a $f(x)$:

$$f(x) = \mathrm{SF}(f)(x) = \frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 25}\,\mathrm{sen}(2kx)$$

b) Identidad de Parseval

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos^2(5x)dx = \frac{1}{4} + \frac{4^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-25)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-25)^2} = \frac{\pi^2}{4^3} \checkmark}$$

Si f es par, su desarrollo es sólo de cosenos

Lema 1: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 a trozos, par y periódica de período $2L$, entonces su desarrollo de Fourier trigonométrico es una serie que consiste sólo de cosenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde los coeficientes no nulos se calculan en la forma:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \; n \geq 1$$

mientras que $b_n = 0 \; \forall n \geqslant 1$

Demostración: La prueba procede en el caso $2L = 2\pi$ para facilitar la visualización, pero es la misma para cualquier valor del período. Notar primero que, dado que

- f es par $\Rightarrow f(-x) = f(x)$,
- la función seno es impar $\Rightarrow \operatorname{sen}(-nx) = -\operatorname{sen}(nx)$,

obtenemos entonces que el producto de ambas resulta una función impar porque

$$f(-x)\operatorname{sen}(-nx) = -f(x)\operatorname{sen}(nx)$$

Comprobemos ahora que todos los coeficientes b_n son cero:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx, \;\; n \geq 1$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-x)\,\mathrm{sen}(-nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$$

Hagamos el cambio de variables en la primera:

$$u = -x \Rightarrow du = -dx$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{+\pi}^{0} f(u)\,\mathrm{sen}(nu)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$$

Atención a los límites de integración: el cambio inverso hay que aplicarlo en ellos pues el teorema dice:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} g(u)\,du = \int_{a}^{b} g(\phi(x))\phi'(x)\,dx$$

Concluímos entonces que

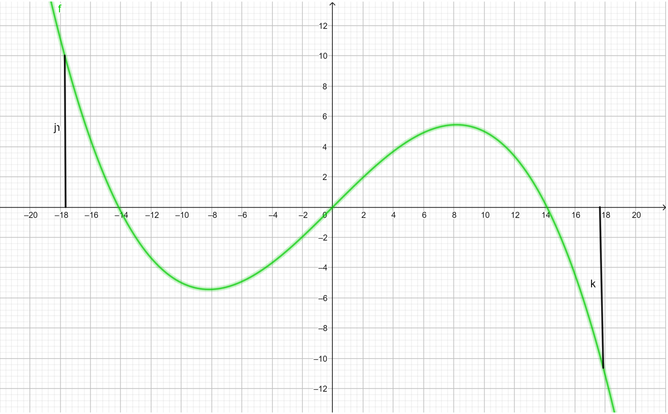
$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{+\pi}^{0} f(u)\,\mathrm{sen}(nu)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{-1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(u)\,\mathrm{sen}(nu)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$$

dado que en una integral definida u y x son variables mudas, se pueden unificar y así obtener:

$$b_n = \frac{-1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}(nt)\,dt = 0 \ \forall n$$

La integral de una función impar en un intervalo simétrico es cero



$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\ \text{par}\ \ \mathrm{sen}(nx)}_{integrando\ \ impar}\, dx = 0,\ \ n \geq 1$$

Por otra parte, dado que

- f es par $\Rightarrow f(-x) = f(x)$,
- la función coseno es par $\Rightarrow \cos(-nx) = \cos(nx)$,

$\Rightarrow$ su producto es par: $f(-x)\cos(-nx) = f(x)\cos(nx)$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

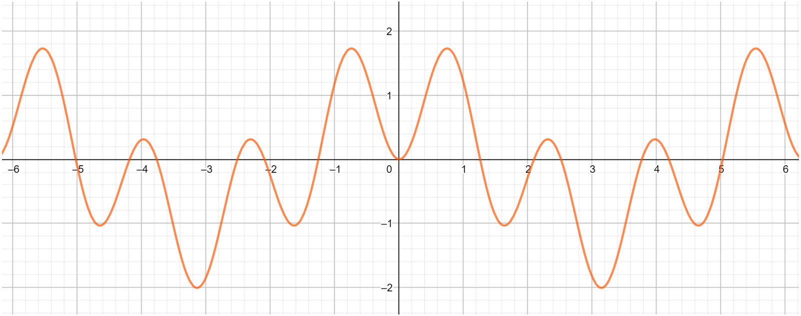
$$= \frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-x)\cos(-nx)\,(-dx) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{-1}{\pi}\int_{+\pi}^{0} f(u)\cos(nu)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \checkmark$$

La integral de una función par en $(-\pi, \pi)$ es el doble de la integral en $(0, \pi)$

En el cálculo de la integral de una función par hay la misma cantidad de área a la derecha que a la izquierda del eje x:



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \text{ par } \; cos(nx)}_{integrando\ \ par} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, cos(nx) dx, \; n \geq 0$$

Si f es impar, su desarrollo es sólo de senos

Lema 2: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 a trozos, impar y periódica de período $2L$, entonces su desarrollo de Fourier trigonométrico es una serie sólo de senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde los coeficientes no nulos se calculan en la forma:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1$$

mientras que $a_0 = a_n = 0 \ \forall n$ ✓

Ejercicio 2. Onda Cuadrada

Desarrollar en serie de Fourier trigonométrica la función periódica de período 2π, $f(x) = \begin{cases} -1 & si \ -\pi \leqslant x < 0 \\ 1 & si \ 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$

- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = 0, \quad n \geq 0 \; pues \; f \; impar$
- $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = \frac{-2}{\pi n} \; \cos(nx)\Big|_0^{\pi}$

$$= -\frac{2}{\pi n} \; ((-1)^n - 1)$$

$$= \begin{cases} 0 : & n \; par \\ \\ \dfrac{4}{\pi n} & solo \; para \; n \; impar \; n = 2k - 1 : k \geqslant 1 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$b_n = \begin{cases} 0 : & n \; par \\ \dfrac{4}{\pi(2k-1)} & para \; n \; impar \; n = 2k-1 : k \geqslant 1 \end{cases}$$

La serie de Fourier converge a $f(x)$ en cada punto x donde f es continua:

$$\boxed{f(x) \quad = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin((2k-1)x) \quad \text{para} \quad x \neq n\pi : n \in \mathbf{Z}.}$$

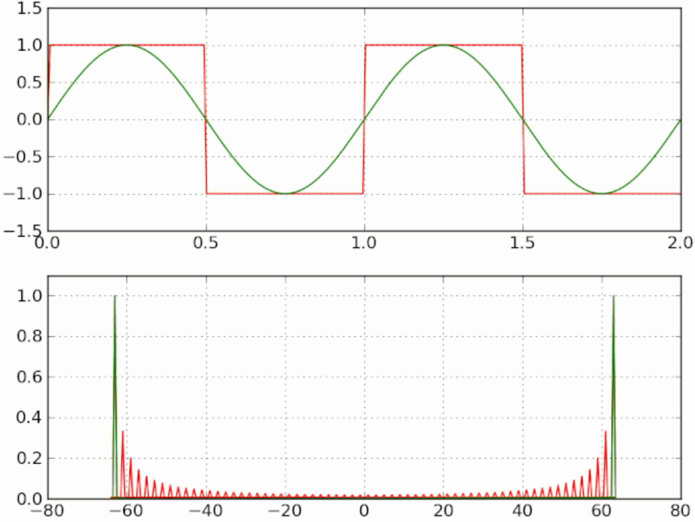
- Además, $f(n\pi) = 0 \; \forall n$ ✓

Primeros armónicos

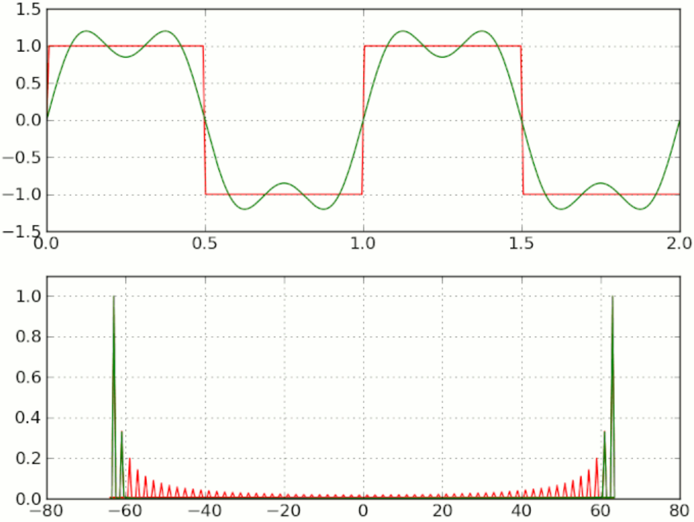
Ver a continuación la animación de las aproximaciones dadas por las sumas parciales $S_n[f]$, llamadas **primeros armónicos**.

Nótese el desvío sistemático, el *overshot*, cada vez más agudo que presenta la gráfica de $s_n(x)$ en la proximidad de cada salto de la función, a medida que $n \longrightarrow \infty$.
Este fenómeno ocurre con total generalidad y se conoce con el nombre de fenómeno de Gibbs, en honor de su descubridor, el estadounidense J. W. Gibbs (1839-1903).

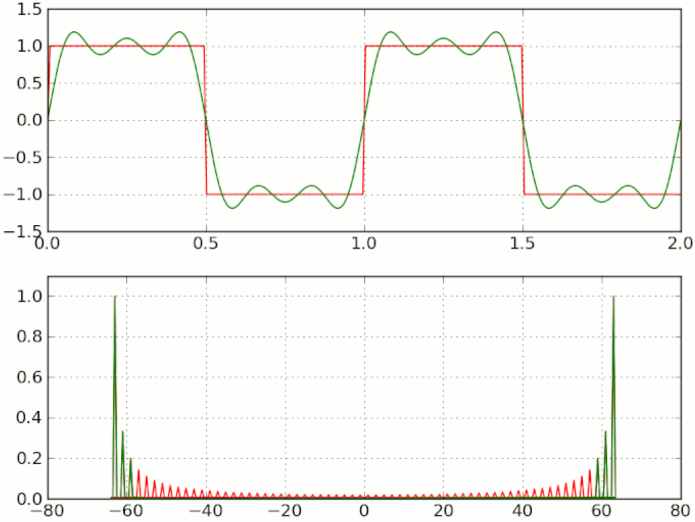
Animación Primeros armónicos



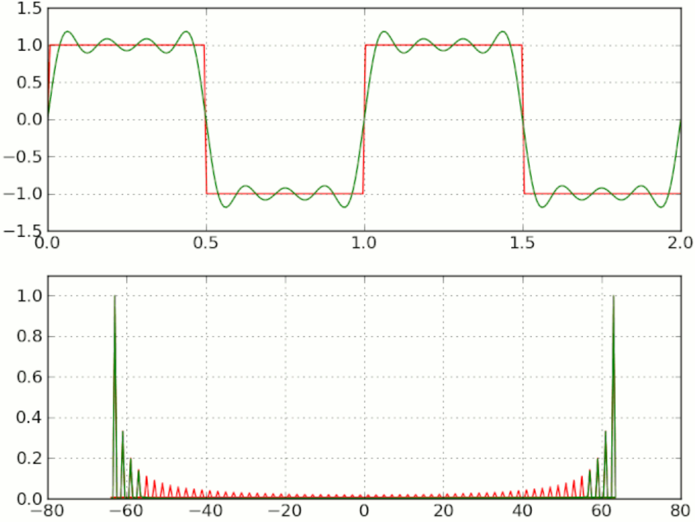
Animación Primeros armónicos



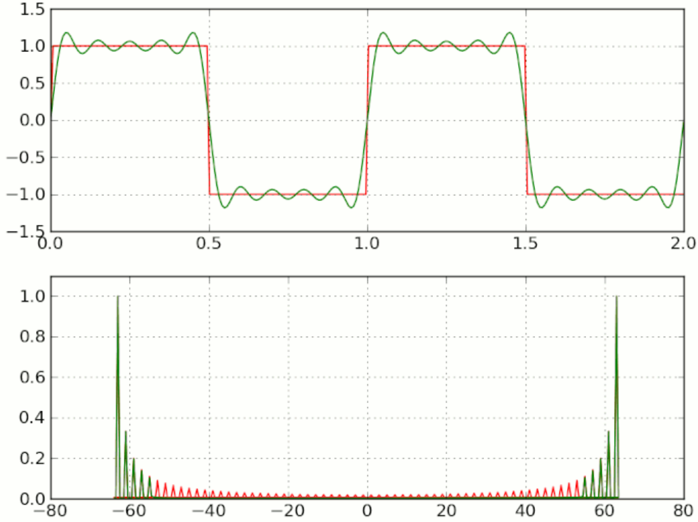
Animación Primeros armónicos



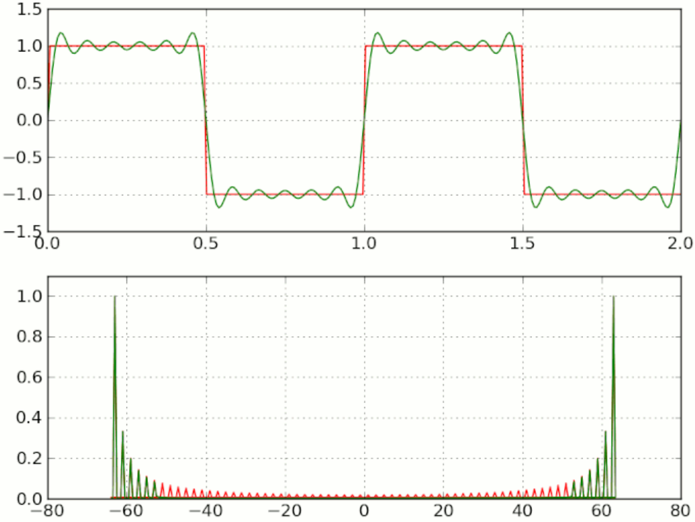
Animación Primeros armónicos



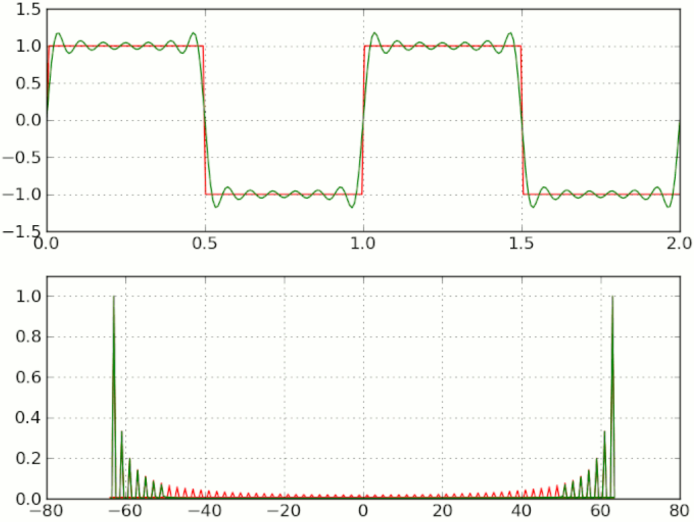
Animación Primeros armónicos



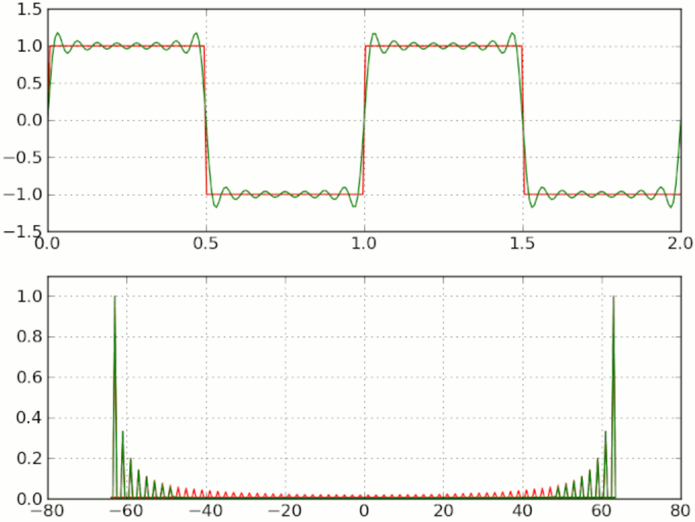
Animación Primeros armónicos



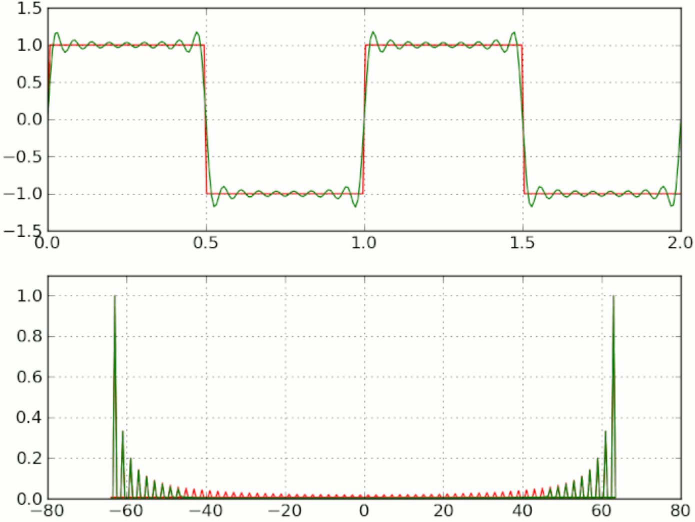
Animación Primeros armónicos



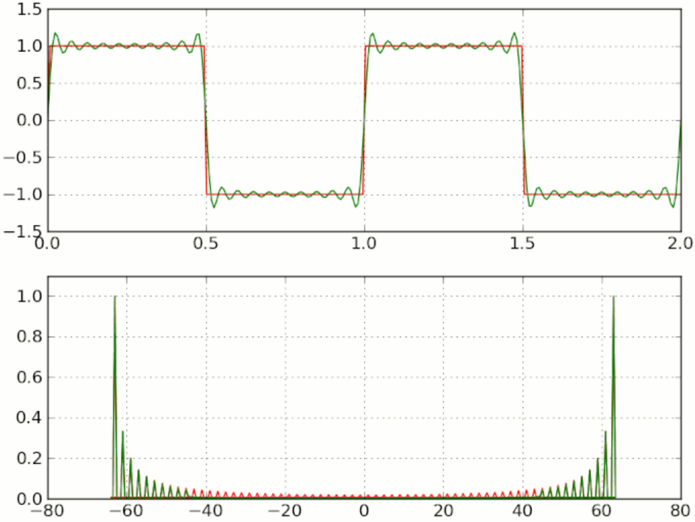
Animación Primeros armónicos



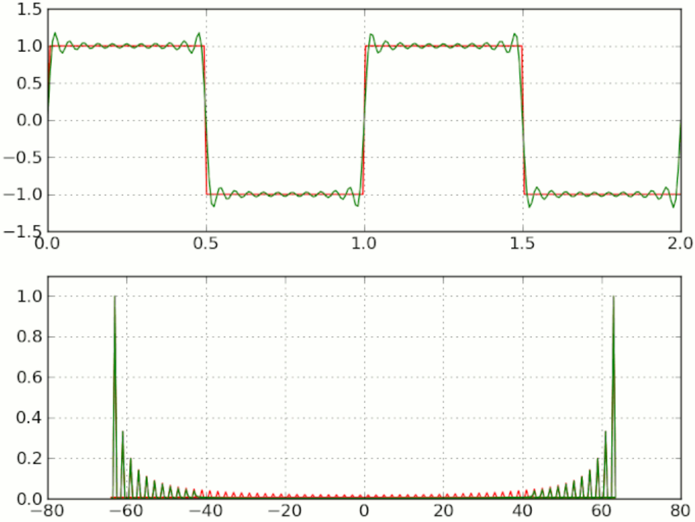
Animación Primeros armónicos



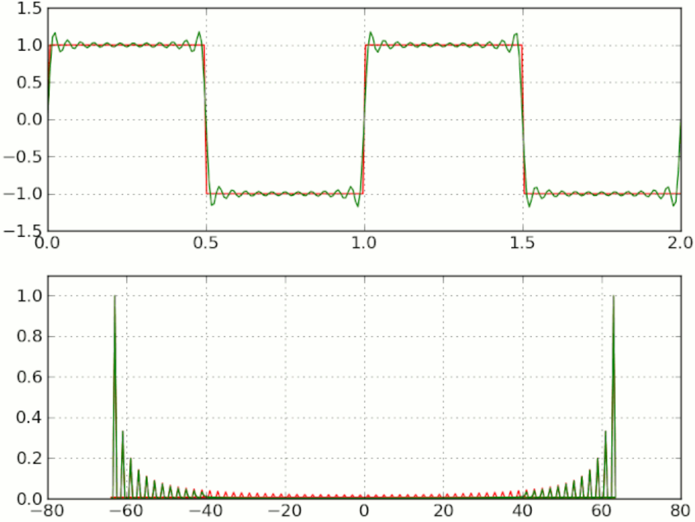
Animación Primeros armónicos



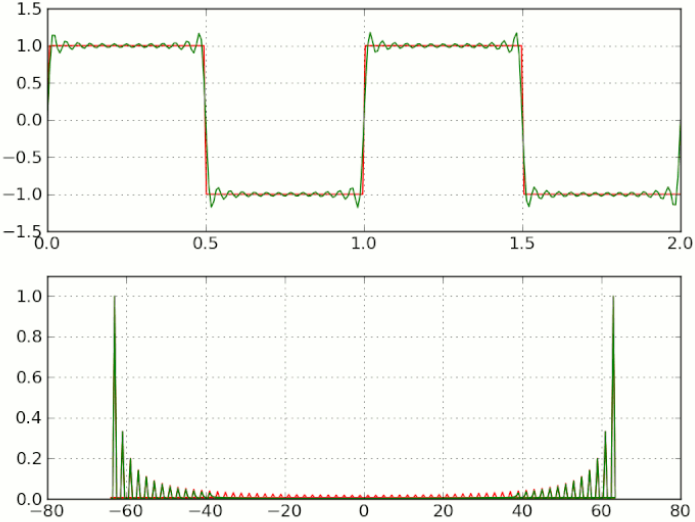
Animación Primeros armónicos



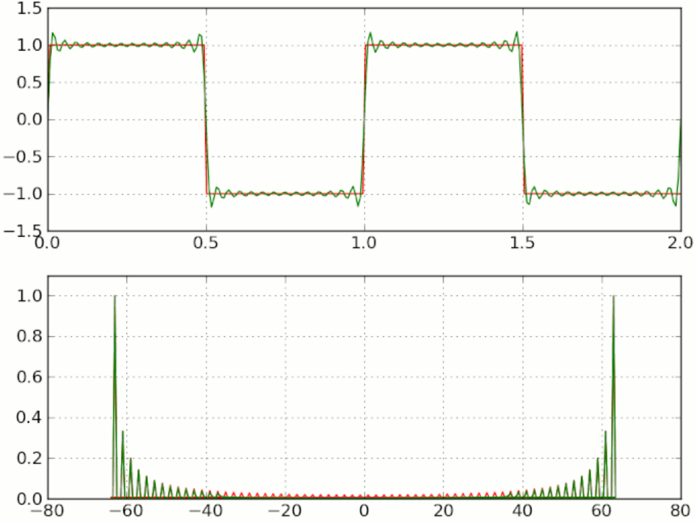
Animación Primeros armónicos



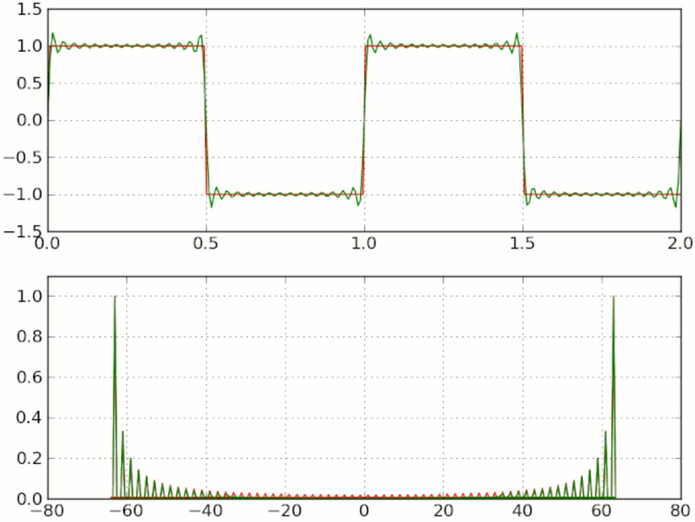
Animación Primeros armónicos



Animación Primeros armónicos



Animación Primeros armónicos



Ejercicio 3

Desarrollar $f(x) = x(\pi - x) : 0 \leqslant x \leqslant \pi$ como serie de senos.

Evaluar las series numéricas

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} = -\frac{\pi^3}{32} \quad y \quad \mathcal{S}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

Solución: serie de senos $\Rightarrow f$ impar: definamos

$$f(-x) = -f(x) : 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) : & 0 \leqslant x < \pi \\ x(\pi + x) : & -\pi \leqslant x < 0 \end{cases}$$

Serie de Fourier de f impar

f impar, entonces

$$\bullet a_n = 0 \ \forall n$$

$$\bullet b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n^3}\left[(n^2 x(x-\pi)-2)\cos(nx) + n(\pi - 2x)\operatorname{sen}(nx)\right]\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^3}\left[(n^2\pi(\pi-\pi)-2)\cos(n\pi) + n(\pi - 2\pi)\operatorname{sen}(n\pi)\right]$$

$$-\frac{2}{\pi n^3}\left[(n^2 0\cdot(0-\pi)-2)\cos(0) + n(\pi - 0)\operatorname{sen}(0)\right]$$

$$= \frac{4}{\pi n^3}\left[-\cos(n\pi) + \cos(0)\right]$$

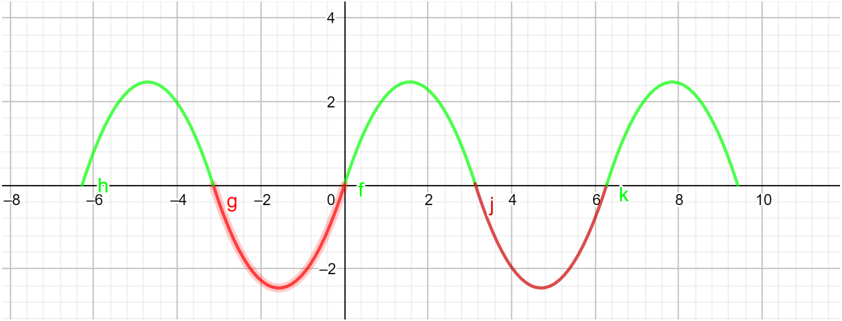
$$= \frac{4}{\pi n^3}\left[-(-1)^n + 1\right] = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi n^3} & n \textit{ impar} \\ 0 & n \textit{ par} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \sim \frac{8}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\operatorname{sen}((2k-1)x)\ \forall x \in \mathbb{R}}$$

f periódica es continua en $\mathbb{R}$

Del gráfico es fácil deducir que f extendida de forma periódica, de período 2π, es continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x+2k\pi) = f(x) : \; -\pi \leqslant x < \pi$$



Evaluación de las series numéricas

Estrategia para evaluar $\mathcal{S}_1$: encontrar un valor conveniente de x tal que los coeficientes de Fourier de la serie de f sean similares (por ejemplo, múltiplicados por una constante) a los de la serie que se busca calcular

Dado que f es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en todo $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$, con derivadas laterales en los puntos $n\pi$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{la serie de Fourier de } f \text{ converge a } f(x) \text{ en cada } x \in \mathbb{R}}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \operatorname{sen}((2k-1)x) \ \forall x \in \mathbb{R}}$$

Evaluación de las series numéricas

$$\Rightarrow f(x) = \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \operatorname{sen}((2k-1)x)) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Calculemos

$$\operatorname{sen}\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{2}(\pi - \frac{\pi}{2}) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3}(-1)^{k+1}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{S}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} = -\frac{\pi^3}{32}$$

Identidad de Parseval

Estrategia para $\mathcal{S}_2$: Identidad de Parseval pues en $\mathcal{S}_2$ los coeficientes aparecen a cuadrado

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi^4}{15} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x(\pi - x)|^2\,dx = \frac{8^2}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(2k-1)^3}\right|^2$$

$$= \frac{8^2}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi^6}{960} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6} = \mathcal{S}_2 \checkmark$$

Ejercicio 4

Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función par $g(x) = \pi - 2x : 0 \leqslant x \leqslant \pi$ como serie de cosenos.

Solución: serie de cosenos $\Rightarrow f$ par: definamos

$$g(-x) = g(x) : 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$\Rightarrow b_n = 0 \; \forall n$$

- $a_0 = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - 2x)\,dx$

- $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - 2x)\cos(nx)\,dx$

¿Podemos ahorrar algunos cálculos? Sí porque

$g(x) = \pi - 2x = f'(x) : 0 \leqslant x < \pi$ del ejercicio 3

Proposición 1: Convergencia Uniforme

Si la serie siguiente

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

verifica $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$, entonces la sucesión de funciones

$$f_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

converge uniformemente, y en consecuencia la serie define una función continua $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$, de la cual la anterior es su serie de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

Proposición 2: Serie de Fourier de la derivada

Sea f definida por $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$

donde todas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| < \infty$ entonces las dos sucesiones de sumas parciales

$$f_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}(nx) \text{ y}$$

$$f_N'(x) = \sum_{n=1}^{N} nb_n \cos(nx) - \sum_{n=1}^{N} na_n \operatorname{sen}(nx)$$

convergen (ambas) uniformemente, en consecuencia f es C^1 en todo $\mathbb{R}$ y la serie de la derivada es

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos(nx) - \sum_{n=1}^{\infty} na_n \operatorname{sen}(nx)$$

En este caso, $g(x) = f'(x) : -\pi < x < \pi$ del ejercicio anterior, con

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) : & 0 \leqslant x < \pi \\ x(\pi + x) : & -\pi \leqslant x < 0 \end{cases} \sim \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \operatorname{sen}((2k-1)x) \ \forall x$$

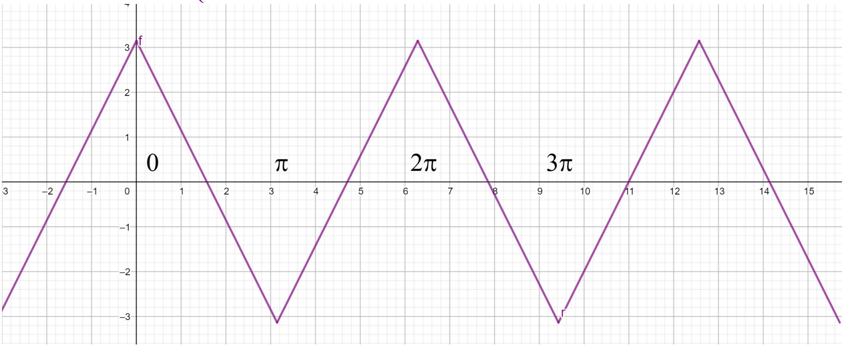
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)}{|(2k-1)^3|} \leqslant \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

converge uniformemente, en consecuencia f es C^1 y, el Teorema 2 $\Rightarrow$ la serie de Fourier de su derivada es

$$\boxed{f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos(nx) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)}$$ ✓

Serie de f': función par

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} \pi - 2x : & 0 \leqslant x < \pi \\ \pi + 2x : & -\pi \leqslant x < 0 \end{cases}$$



Existe f' pero no existe f'' en $n\pi$

Notar que la f original (impar) estaba dada por

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) : & 0 \leqslant x < \pi \\ x(\pi + x) : & -\pi \leqslant x < 0 \end{cases}$$

Veamos entonces que existen $f'(x)$ en $x = 0, \pm\pi$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(\pi - x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \pi - x = \pi \\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x(\pi + x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \pi + x = \pi \end{cases} \checkmark$$

Análogamente, se puede ver que existen $f'(x)$ en $\pm\pi$

Existe $f'(\pi)$

Atención que, por derecha, en el límite del cociente incremental, hay que tomar la fórmula que corresponde por periodicidad (ver el dibujo):

$$f'(\pi) = \lim_{x\to\pi} \frac{f(x)-f(\pi)}{(x-\pi)} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-\pi^+} \frac{x(\pi+x)}{(x+\pi)} = \lim_{x\to-\pi^+} x = -\pi \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{x(\pi-x)}{(x-\pi)} = \lim_{x\to\pi^-} -x = -\pi \end{cases}$$

Análogamente, se puede ver que existe $f'(-\pi)$ ✓

Identidades Trigonométricas

$$\boxed{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}}$$

$$\boxed{\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}}$$

$$\boxed{\cos(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x-y)}{2}}$$

Sea f de período 2π, C^1 a trozos, las fórmulas de Euler:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad , \quad \operatorname{sen} nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

y reemplazando en la expresión de $S[f](x)$ se obtiene

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \right] \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\text{donde } c_0 &= \frac{a_0}{2} &&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} &&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \quad , \quad n \in \mathbb{N} \\
c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} &&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\, dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Sea f de período $2L$, C^1 a trozos, las fórmulas de Euler:

$$\cos nx = \frac{e^{\frac{\pi}{L}inx} + e^{-\frac{\pi}{L}inx}}{2} \quad , \quad \operatorname{sen} nx = \frac{e^{\frac{\pi}{L}inx} - e^{-\frac{\pi}{L}inx}}{2i}$$

y reemplazando en la expresión de $S[f](x)$ se obtiene

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{\frac{\pi}{L}inx} + c_{-n} e^{-\frac{\pi}{L}inx} \right] \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{donde } c_0 &= \frac{a_0}{2} &&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \\
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} &&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-\frac{\pi}{L}inx}\,dx \quad , \quad n \in \mathbb{N} \\
c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} &&= \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{\pi}{L}inx}\,dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{4}$$

Notar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, entonces, en general,

$$a_n,\ b_n \in \mathbb{C}$$

Pero si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces

$$a_n,\ b_n \in \mathbb{R} \Rightarrow c_{-n} = \overline{c_n}$$

La suma parcial es real:

$$\sum_{n=-N_0}^{n=N_0} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{n=N_0} \left(c_n e^{inx} + \overline{c_n}\,\overline{e^{inx}} \right) = c_0 + 2\mathcal{R}e \left(\sum_{n=1}^{n=N_0} c_n e^{inx} \right) \in \mathbb{R} \checkmark$$

Ej. 5. a) Serie Exponencial de $f(x) = x : -\pi < x < \pi$

Sea $f(x) = x : -\pi < x < \pi$ de período 2π, entonces

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-1}{ni}xe^{-inx} + \frac{1}{n^2}e^{-inx}\right]\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

Usemos ahora que el coseno es par y el seno es impar:

$$e^{-inx}\Big|_{x=\pm\pi} = [\cos(nx) - i\,\mathrm{sen}(nx)]\Big|_{x=\pm\pi} = (-1)^n$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-2}{ni}\pi + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right](-1)^n = \left[\frac{-1}{ni}\right](-1)^n = \frac{i}{n}(-1)^n : n \geqslant 1$$

Serie Exponencial de $f(x) = x : -\pi < x < \pi$

Análogamente, atención al cambio de signo en la fórmula

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{+inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ni}xe^{inx} + \frac{1}{n^2}e^{inx}\right]\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{ni}\pi + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right](-1)^n = \left[\frac{1}{ni}\right](-1)^n = -\frac{i}{n}(-1)^n : n \geqslant 1$$

Obtenemos la serie en forma exponencial, de la cual se deduce la trigonométrica: multiplicando y dividiendo por $2i$:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}(-1)^n \left[e^{inx} - e^{-inx}\right] : \text{Serie Exponencial} \qquad (5)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{sen}(nx) : \text{ Serie Trigonométrica}$$

Ejercicio 5. b) Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la anterior

$$f \ impar,\ f(x) = x, \quad \text{para} - \pi < x < \pi, \quad f(x + 2n\pi) = f(x)$$

En este caso, los coeficientes de Fourier:

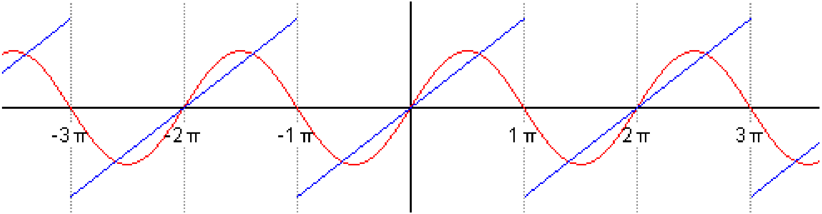
$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx)\, dx = 0, \quad n \geq 0. \\ b_n &= \tfrac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \tfrac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x \cos(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= -\tfrac{2}{n} \cos(n\pi) = 2\, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

La serie converge a $f(x)$ en cada x donde f es continua:

$$f(x) \quad = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx), \quad \text{para} \quad x \neq (2n+1)\pi : \ n \in \mathbf{Z}$$

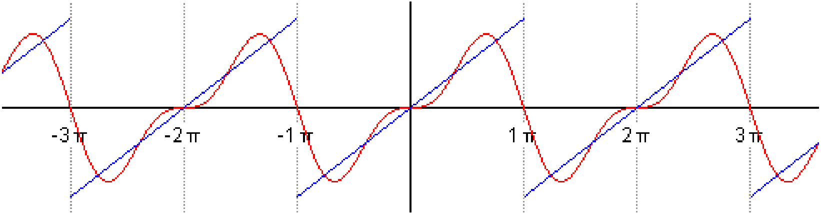
Primeros armónicos

Animación de las aproximaciones dadas por las sumas parciales $S_n[f]$, llamadas **primeros armónicos**:



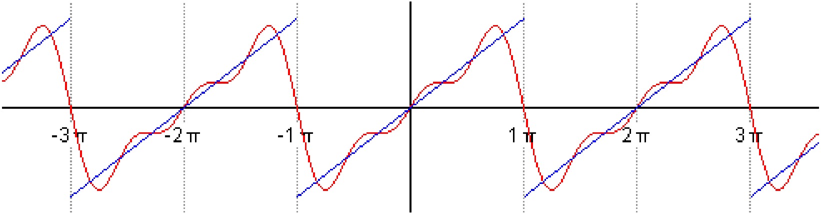
Primeros armónicos

Animación de las aproximaciones dadas por las sumas parciales $S_n[f]$, llamadas **primeros armónicos**:



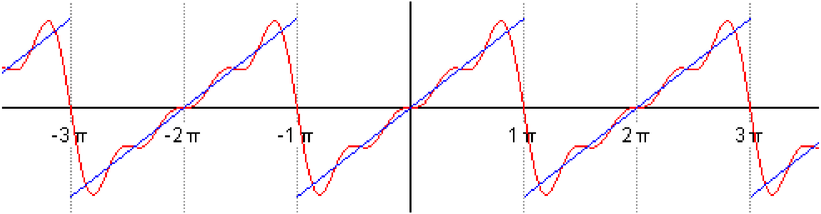
Primeros armónicos

Animación de las aproximaciones dadas por las sumas parciales $S_n[f]$, llamadas **primeros armónicos**:



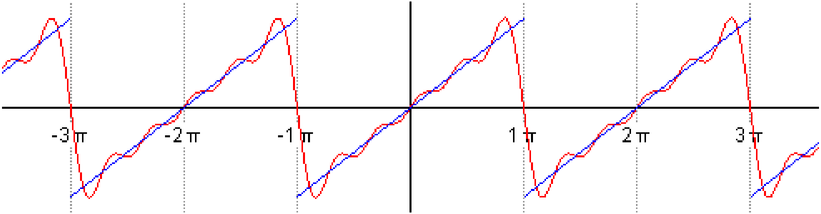
Primeros armónicos

Animación de las aproximaciones dadas por las sumas parciales $S_n[f]$, llamadas **primeros armónicos**:



Primeros armónicos

Animación de las aproximaciones dadas por las sumas parciales $S_n[f]$, llamadas **primeros armónicos**:



CONTINUACIÓN: MIÉRCOLES 9/11/2022

Serie de Fourier de la Primitiva

Proposición 3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, C^1 a trozos y 2π-periódica; consideremos su primitiva $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, entonces

a) F es 2π-periódica si y sólo si $\int_0^{2\pi} f(t)dt=0$, es decir, $a_0=0=c_0$.

b) Si f es como en a) entonces, los coeficientes de Fourier de la forma exponencial verifican

$$c_n[F]=\frac{1}{in}c_n[f]: n\neq 0$$

En otras palabras, la integral de la serie es la serie de las integrales término a término:

$$f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{inx}\Rightarrow F(x)\sim c_0+\sum_{n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0}\frac{c_n}{in}e^{inx}$$

Ej 10. Hallar la serie exponencial de Fourier de $\phi(x) = e^{\alpha e^{ix}}$ en $(-\pi, \pi)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
b) Probar $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2\alpha\cos(x)}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{n!^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Extendamos $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en forma periódica, de período 2π.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha e^{ix}} e^{-inx}dx \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Consideremos un cambio de variable complejo $z = e^{ix}$ que convierta esta integral en una integral de línea compleja:

$$\text{Si } z = e^{ix} : -\pi \leqslant x \leqslant \pi \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{C} : |z| = 1 & \text{pues } x \in \mathbb{R} \\ dz = ie^{ix}dx & \Rightarrow dx = \frac{dz}{iz} \\ \phi(x) = e^{\alpha e^{ix}} & = e^{\alpha z} =: f(z) \end{cases}$$

Con $z = e^{ix}$, tenemos que $\phi(x) = e^{\alpha e^{ix}}$ es la restricción a $S^1 = \{|z| = 1\}$ de $f(z) = e^{\alpha z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y los c_n se expresan en la nueva forma:

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha z} z^{-n} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{\alpha z} z^{-n} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{\alpha z} z^{-n-1} dz$$

$\Rightarrow$Los c_n son los coeficientes de la serie de Laurent de f centrada en $z = 0$:

$$f(z) = e^{\alpha z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$$

Los c_n son los coeficientes de Laurent de f

- Si $n \leqslant -1 \Rightarrow -(n+1) \geqslant 0 \Rightarrow c_n$ es la integral de línea de la función holomorfa $e^{\alpha z} z^{-(n+1)}$ que es cero.
- Si $n \geqslant 0$, la integral se calcula por Fórmula Int de Cauchy:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{e^{\alpha z}}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha^n}{n!}$$

$$\Rightarrow c_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \leqslant -1 \\ \dfrac{\alpha^n}{n!} & si \quad n \geqslant 0 \end{cases}$$

Obtenemos a la izquierda la serie de Laurent de $f(z)$ y a la derecha la de Fourier de $\phi(x)$:

$$\Rightarrow f(z) = e^{\alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} z^n \Rightarrow \boxed{\phi(x) = f(e^{ix}) = e^{\alpha e^{ix}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} e^{inx}}$$

Proposición: de la serie de Laurent se obtiene la de Fourier

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y el desarrollo en serie de Laurent centrada en $z = 0$ de f es

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

válido en $z \in \Omega \supset S^1 = \{z = e^{ix} : x \in [0, 2\pi]\}$, ($f$ podría tener una singularidad en $z = 0$)

$$\Rightarrow \phi(x) := f(e^{ix}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (e^{ix})^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

es el desarrollo en serie de Fourier de $\phi(x)$ ✓

b) Identidad de Parseval

La I de Parseval implica la identidad que pide el enunciado:

Trigonométrica: $$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\phi(x)|^2dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2}$$

Exponencial: $$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\phi(x)|^2dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2}$$

Si $w \in \mathbb{C} \Rightarrow |e^w| = e^{Re(w)}$, se tiene que el módulo en el integrando para $\alpha \in \mathbb{R}$ es

$$|\phi(x)| = |e^{\alpha e^{ix}}| = e^{\alpha\cos(x)} \Rightarrow |\phi(x)|^2 = |e^{\alpha e^{ix}}|^2 = e^{2\alpha\cos(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{\alpha e^{ix}}|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2\alpha\cos(x)}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{n!^2} \checkmark}$$

APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE EC. DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

ECUACIÓN DEL CALOR

TEMPERATURA EN EL INTERIOR ENTRE PAREDES A TEMPERATURA CERO.

Consideremos un cuerpo homogéneo, conductor del calor, situado en una región del espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$, comprendida entre los planos paralelos

$$\Pi_0 : \ x = 0, \ \Pi_L : \ x = L$$

pero depende sólo de la coordenada x.

La temperatura en el interior está dada por $u(x,t)$ que debe satisfacer la ecuación del calor

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

donde $k > 0$ es la constante de conductividad térmica: un dato de cada problema. Denotemos por $u(x,t)$ la temperatura en el punto de abscisa x en el instante t. Supongamos además que la distribución inicial de temperatura está dada por

$$u(x,0) = f(x) \textit{ de clase } C^1 \textit{ a trozos en } [0,L]$$

verificando la condición de contorno

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \ \forall t > 0$$

Resolvemos para el caso $f(x) : 0 < x < \pi$ cualquiera

Resolvamos el problema suponiendo como condición inicial

$$u(x,0) = f(x) : 0 < x < \pi$$

y la condición de contorno

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ \forall t > 0$$

Nos interesan las soluciones no nulas de variables separables $u(x,t) = X(x)T(t)$ que proveen soluciones particulares, pero una gran familia de soluciones al fin.

Con esta hipótesis, la ecuación se reescribe en la forma

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

Pero queremos sólo soluciones con $X(x),\ T(t) \neq 0\ \forall (x,t)$:

$$\Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)}$$ que depende a la vez de x y de t

$\Rightarrow$ existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda = k\frac{X''(x)}{X(x)}$$

$\Leftrightarrow$ la ecuación en derivadas parciales se reduce a dos ecuaciones de una sola variable:

$$T'(t) = \lambda T(t), \quad X''(x) = \frac{\lambda}{k}X(x)$$

- $T'(t) = \lambda T(t) \Rightarrow \boxed{T(t) = T(0)e^{\lambda t}}$

- Si $\lambda > 0$ tenemos para $X(x)$:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x}$$

- Pero si

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ \forall t > 0$$

tendríamos

$$u(x,t) = T(t)X(x) = T(0)e^{\lambda t}\left(Ae^{\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x}\right)$$

y entonces

$$\begin{cases} 0 = u(0,t) = T(t)X(x) = T(0)e^{\lambda t}\left(A+B\right) \\ \\ 0 = u(\pi,t) = T(0)e^{\lambda t}\left(Ae^{\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\pi} + Be^{-\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\pi}\right) \end{cases}$$

lo que implicaría $A = B = 0$, que da la solución trivial.

- Si en cambio buscamos soluciones con la constante $-\lambda < 0$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda = k\frac{X''(x)}{X(x)}$$

$$\Rightarrow T(t) = T(0)e^{-\lambda t}, \quad X''(x) + \frac{\lambda}{k}X(x) = 0$$

Pero ahora $\lambda > 0$ y el polinomio característico de la ecuación de orden 2: $z^2 + \frac{\lambda}{k} = 0$ tiene raíces complejas, no reales: $z = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{k}}i \in i\mathbb{R}$, por lo tanto sus soluciones son

$$\Rightarrow X(x) = A\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x\right)$$

Además debe verificarse

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ \forall t > 0$$

$$\Rightarrow 0 = u(0,t) = T(0)e^{-\lambda t}(A + B\cdot 0) \Rightarrow A = 0$$

Dado que no puede ser $B = 0$, de la identidad

$$0 = u(\pi, t) = T(0)e^{-\lambda t} B \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\pi\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\pi\right) = 0$$

Necesitamos entonces $\sqrt{\frac{\lambda}{k}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda = kn^2, \quad n \in \mathbb{N}$

Para cada n, unificando coeficientes: $B_n = T(0)B$, tendremos entonces una solución de la forma:

$$\boxed{u_n(x, t) := B_n e^{-kn^2 t} \operatorname{sen}(nx) : n \in \mathbb{N}}$$

$\Rightarrow$ cada u_n verifica $u_n(0, t) = 0 = u_n(\pi, 0)$.

Si ahora consideramos la condición

$$u(x, 0) \stackrel{?}{=} x(\pi - x)$$

cada solución por separado no la satisface pues

$$u_n(x, 0) = B_n e^{-kn^2 \cdot 0} \operatorname{sen}(nx) = B_n \operatorname{sen}(nx) \neq f(x)$$

Dado que la ecuación es lineal, la suma finita de soluciones es solución; más aún, nos interesan soluciones de la forma

$$\boxed{u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-kn^2 t} \operatorname{sen}(nx) \ \forall t \geqslant 0}$$

En particular, debe valer la condición inicial:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(nx)$$

y esta igualdad se resuelve eligiendo los $\{B_n\}_{n\geqslant 1}$ como los coeficientes de Fourier de la extensión impar de $f(x)$ a $[-\pi,\pi]$ ✓

a) Resolver la ecuación del calor para $f(x) = x(\pi - x)$

Habíamos obtenido (en la pág 53, ejercicio 3) la serie de Fourier de la extensión impar a $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen}\left((2n-1)x\right)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{u(x,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k(2n-1)^2 t} \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen}\left[(2n-1)x\right]}$$

$\Rightarrow$ es la solución de la ecuación con las condiciones iniciales dadas. ✓

b) Otro Ejemplo de la Ecuación del Calor

Una barra delgada de aluminio de 10 cm de longitud se calienta hasta una temperatura uniforme de $100°$*C. En el instante* $t = 0$*, los extremos de la barra se llevan a* $0°$*C y de allí en más se mantienen a esa temperatura. No se permite la transmisión de calor por la superficie lateral de la barra. Sabiendo que la la constante de conductividad térmica es* $\alpha^2 = 0.86\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$*, encontrar la expresión de la temperatura* $u(x,t)$ *en cualquier punto* x *de la barra y en cualquier instante* t *posterior.*

El problema es hallar u tal que:

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \text{ ó } x = 10 \\ 100 & \textit{otro caso} \end{cases}$$

$$u(0,t) = 0 = u(10,t), \ \forall t$$

y que u satisfaga

$$\boxed{\boxed{u_t = k u_{xx}}}$$

donde $k = \alpha^2 = 0.86 \ cm^2/s$ es la constante de conductividad térmica.

Notar que, en el Laplaciano, sólo aparece la derivada con respecto a x, porque la difusión del calor se produce sólo en esa dirección, ya que no se permite transmisión de calor en las otras direcciones.

Se propone como solución

$$\boxed{u(x,t) = C + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

donde

$$\boxed{\lambda_n = k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

Como las variables t, x son independientes, para cualquier elección de C y a_n y b_n, se verifica

$$u_t = k u_{xx}$$

Si evaluamos en $x = 0$, para todo t tendremos

$$u(0,t) = C + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t} \quad \forall t$$

Así que para que se verifique $u(0,t) = 0$ para todo t

$$\Longrightarrow C = 0, \; a_n = 0 \quad \text{para todo } n$$

$\Longrightarrow$ se obtiene una serie de senos por exponencial

$$\Longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

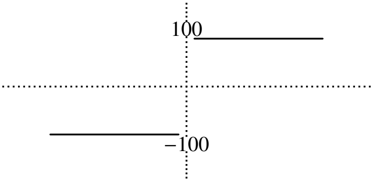
Esta expresión satisface la condición

$$u(L,t) = 0 \;\forall t$$

Ahora tenemos que resolver $u(x,0) = f(x)$, es decir:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ó } x = 10 \\ 100 & \text{si} \quad 0 < x < 10 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ se resuelve hallando la serie de Fourier de f extendida de forma impar a $[-10,\ 10]$, periódica de período $2L = 20$:



- $a_n = 0 \ \forall n \geqslant 0$

- $b_n = \dfrac{2}{10}\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{10}x\right) = \frac{200}{10}\int_0^{10} \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{10}x\right)$

$$= -\frac{200}{10}\frac{10}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\Big|_{x=0}^{x=10} = -\frac{200}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \begin{cases} 0 : & n \ par \\ 200\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{(2k-1)} : & n \ impar, \ n = 2k-1, \ k \geqslant 1 \end{cases}$$

Obtenemos el desarrollo de Fourier de la función onda cuadrada

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{100}{(2k-1)} \operatorname{sen}\left[\frac{(2k-1)\pi}{10} x\right]$$

donde $L = 10\ cm$.

Volviendo a $u(x,t)$ concluímos que la solución de la ecuación del calor con las conidiciones iniciales es, para x medida en cm y t en segundos:

$$\boxed{\boxed{\boxed{u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100}{(2k-1)} e^{-0.86\left(\frac{(2k-1)\pi}{10}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{10}x\right) \checkmark}}}$$

Ejercicio de Repaso. Calcular la serie de Fourier trigonométrica de $f(x) = x|x| : -\pi \leqslant x < \pi$

Solución: $f(-x) = -x \cdot |-x| = -x \cdot |x| = -f(x) : -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

$$\Rightarrow f \ impar \implies a_n = 0 \ \forall n$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n^3} \left[-(n^2x^2 - 2)\cos(nx) + 2nx \operatorname{sen}(nx) \right] \Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^3} \left[-(n^2\pi^2 - 2)\cos(n\pi) - 2 \right]$$

$$= \frac{2}{\pi n^3} \left[-(n^2\pi^2 - 2)(-1)^n - 2 \right]$$

$$= \frac{-2}{\pi n^3}\left[(n^2\pi^2 - 2)(-1)^n + 2\right]$$

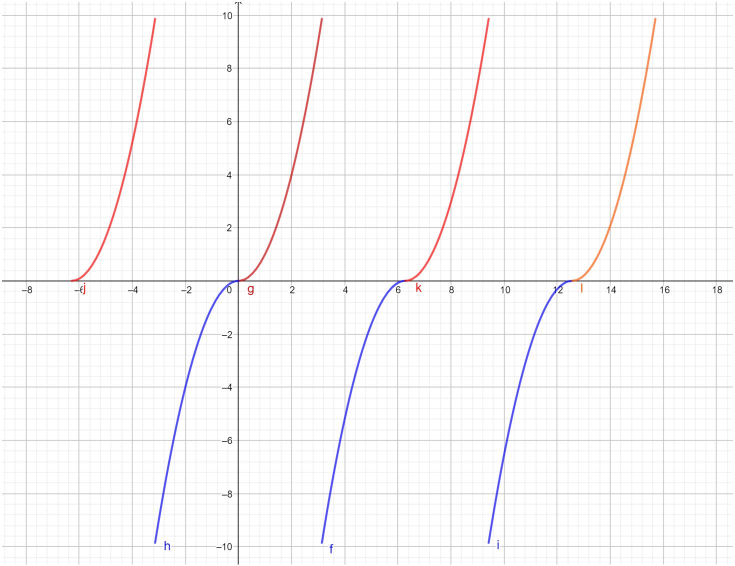
$$\rightarrow f(x) \sim \frac{-2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left[(n^2\pi^2 - 2)(-1)^n + 2\right] \operatorname{sen}(nx)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Convergencia: f es no continua en $x = (2n+1)\pi$, luego

- $SF[f](x) = f(x)\ \forall x \neq (2n+1)\pi$
- $SF[f](x) = \dfrac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \dfrac{\pi^2 - \pi^2}{2} = 0\ \forall x = (2n+1)\pi$ ✓

$$f(x) = x|x| : -\pi \leqslant x < \pi, \quad f(x + 2k\pi) = f(x)\ \forall -\pi \leqslant x < \pi$$



La serie dada

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$$

no puede ser la de Fourier de ninguna f continua a trozos (o f en L^2) dado que sus coeficientes no cumplen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[|a_n|^2 + |b_n|^2 \right] < \infty$$

lo cual es evidente, dado que aquí:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \ a_n = 1, \ \ b_n = 0, \ \forall n \geqslant 1$$

$\Rightarrow$ no existe el límite de la serie de los cuadrados de los a_n:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

Ejercicio 16. b

b) $1+\sum_{n=1}^{N}\cos(nx) = \sum_{n=0}^{N} Re(e^{inx}) = Re\left[\sum_{n=0}^{N}(e^{ix})^n\right] = Re\left[\dfrac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}}\right]$

$$= Re\left[\frac{1}{1-e^{ix}}\right] - Re\left[\frac{e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}}\right] \quad (*)$$

Cálculo Auxiliar:

$$= \frac{e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{-i\frac{x}{2}}e^{i(N+1)x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{2i}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i(N+\frac{1}{2})x}$$

$$= \frac{-2i}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\left[\cos\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right) + i\operatorname{sen}\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\left[-i\cos\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right) + \operatorname{sen}\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)\right]$$

Por lo tanto, $(*) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$

$$= Re\left[\frac{1}{1 - e^{ix}}\right] - Re\left[\frac{e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}}\right]$$

$$= \frac{2}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\left[\operatorname{sen}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)x\right) - \operatorname{sen}\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)\right]$$

que no tiene límite cuando $N \to \infty$ ✓