PRÁCTICA 6

SINGULARIDADES

Y

SERIES DE LAURENT

MIÉRCOLES 19/10/2022

Singularidades y Series de Laurent

Se dice que f tiene una singularidad aislada en z_0 si existe $R > 0$:
f es holomorfa en el anillo

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$$

pero no lo es en z_0.
Su desarrollo en series de potencias centrado en z_0 se llama serie de Laurent de f con región de convergencia $\mathcal{D}$

Los coeficientes de Laurent no se pueden calcular como para la serie de Taylor, pues no se pueden evaluar derivadas en un punto singular, que es un punto fuera del dominio: se desarrollan a continuación otras herramientas.

Singularidades Aisladas

Pueden ser de 3 tipos:

- Singularidades Evitables
- Polos de orden m
- Singularidades Esenciales

Singularidades Aisladas

Singularidades Evitables

Singularidad Evitable

Ejercicio 1. Analizar el comportamiento en $z = 0$ y hallar el desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z = 0$ de

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

- f es cociente de holomorfas en $\mathbb{C}$
- Denominador se anula sólo en $z = 0$
  $\Longrightarrow f$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$

$$= \ \textit{anillo de radio interno } 0 \textit{ y radio exterior } \infty$$

$$\boxed{\Longrightarrow f \text{ tiene una singularidad aislada en } z = 0}$$

Singularidad evitable

Recordemos la serie de Taylor centrada en $z = 0$:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \; : z \in \mathbb{C}$$

$$\Longrightarrow \textit{Solo para } z \neq 0 : \; \boxed{\frac{\operatorname{sen} z}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \operatorname{sen} z$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right)$$

$$= 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \frac{z^6}{7!} + \dots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}}$$

Singularidad evitable

Su serie de Laurent no tiene términos de potencias negativas

La serie anterior no tiene parte singular. Evaluemos la serie en $z = 0$:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}\right]_{|z_0=0} = 1$$

¡La función f no se puede evaluar en $z = 0$ pero la serie sí!

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{existe el límite de } f \text{ cuando } z \to 0}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{f \textit{ tiene una singularidad evitable en } z = 0}$

La Regla de L´ Hopital permite calcular

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{1} = \cos 0 = 1$$

Singularidad evitable

Definición: Sea z_0 una singularidad aislada de f;

z_0 se dice singularidad evitable si exite el límite

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$$

Equivalentemente, f tiene una singularidad evitable en z_0 si la serie de Laurent de f en el disco sin el centro

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$$

para algún $R > 0$, no tiene parte singular:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n : \; z \neq z_0$$

en la cual el coeficiente $a_0 = L$.

Singularidad Evitable

Equivalentemente, f tiene una singularidad evitable en z_0, con $L = \lim_{z \to z_0} f(z)$, si la función extendida

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & si\ z \neq z_0 \\ L & si\ z = z_0 \end{cases}$$

es holomorfa en su región de convergencia.

En efecto, en este caso, $\tilde{f}$ coincide con una serie de Taylor, holomorfa en todo el disco.

Singularidad evitable

Ejercicio 2. Analizar el comportamiento en $z = 0$ y hallar el desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z = 0$ de

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

- f es cociente de holomorfas en $\mathbb{C}$
- Denominador se anula sólo en $z = 0$

  $\Longrightarrow f$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$

  $$= \textit{ anillo de radio interno } 0 \textit{ y radio exterior } \infty$$

  $\Longrightarrow f$ tiene una singularidad aislada en $z = 0$

Serie de Laurent alrededor de una singularidad evitable

Recordemos la serie de Taylor centrada en $z = 0$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n : z \in \mathbb{C}$$

$$\Longrightarrow \textit{Solo para } z \neq 0 : \quad \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \cdot (-1 + e^z)$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \left(-1 + 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n-1} : 0 \neq z \in \mathbb{C}$$

$\frac{e^z-1}{z}$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$

pues su serie de Laurent no tiene parte singular

Evaluemos en $z = 0$:

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k\right]_{|z_0=0} = \frac{1}{1!} = a_0 = 1$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \textit{ tiene una singularidad evitable en } z = 0$$

La Regla de L´ Hopital permite calcular

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{1} = e^0 = 1 = a_0 \checkmark$$

Ejemplos de

Polos de Orden 1 y Series de Laurent en Distintos Anillos

Clasificación de Singularidades

Ejercicio 3. Hallar y clasificar las singularidades de

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

Solución: • f es cociente de holomorfas

• $w = 1,\ w = 3$ son singularidades aisladas pues son ceros de orden $m = 1$ del denominador, con numerador $\neq 0$

• $w = 1,\ w = 3$ son polos de orden $m = 1$:

$$\bullet \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

$$\bullet \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}\frac{(z-3)}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Ejercicio 4. Hallar todas los posibles desarrollos en series de Laurent centradas en $z = 3$ si $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ y sus regiones de convergencia.

Hallemos primero la serie de Laurent centrada en $z = 3$ de

$a)$ $h(z) = \dfrac{1}{(z-1)}$; y luego $b)$ $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)(z-1)}$

Solución a) • h es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 1\}$

$$\Longrightarrow h \text{ es holomorfa en } \{z \in \mathbb{C} : |z-3| < 2\}$$

• Se pide desarrollar $h(z)$ en potencias de $(z-3)$:

$$h(z) = \frac{1}{(z-1)} = \frac{1}{2+(z-3)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\frac{z-3}{2}\right)\right]} = (*)$$

h es holomorfa

en el disco $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 3\}$

$$\frac{1}{(1-w)} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n : \forall |w| < 1$$

- Por lo tanto, con $w = -\dfrac{z-3}{2}$

$$(*) = h(z) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-3}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-3)^n$$

h es holomorfa y la serie converge a $f(z)$ en su región de convergencia:

$$\boxed{\text{todo el disco } \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| < 2\}}$$

Solución b) • $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)(z-1)}$ holomorfa en $\{z \neq 1,\ z \neq 3\}$

$$\Longrightarrow f \textit{ es holomorfa en } \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-3| < 2\}$$

$$\Longrightarrow f \textit{ tiene una singularidad aislada en } z = 3$$

• $$f(z) = \frac{1}{(z-3)}\frac{1}{(z-1)} = \frac{1}{(z-3)} \cdot h(z)$$

$$= \frac{1}{(z-3)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-3)^{n-1}$$

Nos damos cuenta de que el primer término tiene una potencia negativa, y obliga a separar este término *singular*, que corresponde a $n = 0$:

f tiene un polo de orden 1 en $z_0 = 3$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-3)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(z-3)} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}(z-3)^1 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(z-3)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-3)^{n-1}$$

$$k := n-1 \rightarrow n = k+1$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-3)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+2}} (z-3)^k$$

$\Rightarrow f$ tiene un polo de orden $m = 1$ en $z = 3$ con región de convergencia = disco sin el centro

$$\boxed{\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-3| < 2\}}$$

Región de convergencia

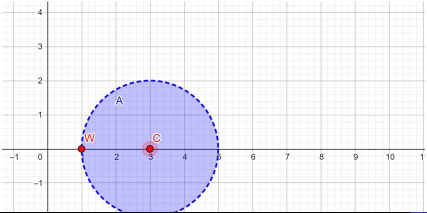
es el disco sin el centro $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-3| < 2\}$.

La serie no converge en $z = 3$. Además, la condición de convergencia de la serie geométrica es $|w| = \left|-\frac{z-3}{2}\right| < 1$

$$\forall z \; tal\ que \quad \left|-\frac{z-3}{2}\right| < 1 \; pero \; z \neq 3 \Rightarrow \forall \; 0 < |z-3| < 2$$

$\Rightarrow$ la serie converge en el disco centrado en $z_0 = 3$, sin el centro:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-3| < 2\}$$



Series de Laurent $\forall |z-3| > 2$

La región es $|z-3| > 2 \Leftrightarrow 1 > \left|\frac{2}{z-3}\right|$ entonces, una serie geométrica para

$$w = \frac{2}{z-3} \Rightarrow |w| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-3)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-3)} - \frac{1}{2}\frac{1}{[2+(z-3)]}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(z-3)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-3)}\frac{1}{1-\left[-\left(\frac{2}{(z-3)}\right)\right]}$$

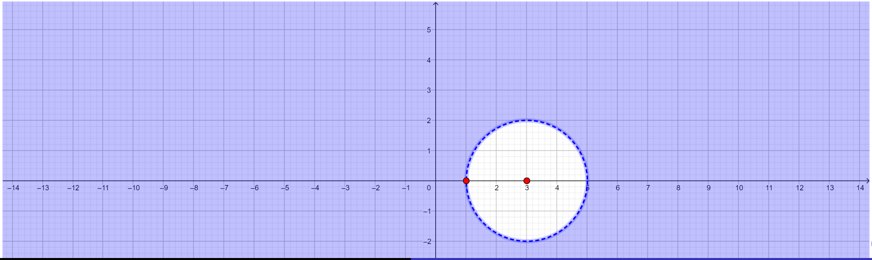
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(z-3)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-3)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-3)^n} \quad \forall |z-3| > 2$$

Series de Laurent $\forall |z-3| > 2$

Por lo tanto, la serie de Laurent en $|z-3| > 2$ es

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-3)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{(z-3)^{n+1}} \checkmark$$

Notar que esta serie tiene infinitos términos de potencias negativas pero no dice nada acerca de la naturaleza de la singularidad en $z = 3$.



Polos de orden 1

Se dice que f tiene un polo de orden $m = 1$ en z_0 si su representación en serie de potencias en el disco sin el centro $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ para algún $R > 0$ es de la forma

$$f(z) = a_{-1}\frac{1}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

es decir, tiene un término no holomorfo de la forma $\dfrac{a_{-1}}{(z - z_0)}$

- El coeficiente a_{-1} se llama el **residuo** $Res(f, z_0) = a_{-1}$
- Este desarrollo se llama serie de Laurent de f centrado en z_0.
- La **región de convergencia es** $\mathcal{D}$**, el disco sin el centro**

Ejercicio 5

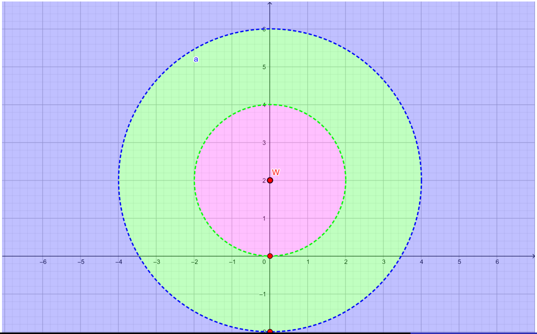
Hallar los posibles desarrollos en serie de Laurent de

$f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)}$ en los diferentes anillos:

a) $\forall\ 0 < |z - 2i| < 2$; b) $\forall\ 2 < |z - 2i| < 4$; c) $\forall\ 4 < |z - 2i|$.

Solución:

- f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0,\ 2i,\ -2i\}$
- f tiene polos de orden $m = 1$ en $z = 0,\ 2i,\ -2i$



Serie de Laurent en $\mathcal{D} = \{z : 0 < |z - 2i| < 2\}$

$f(z)$ en fracciones simples en $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{1}{4z} - \frac{z}{4(z^2+4)} = \frac{1}{4z} - \frac{1}{8}\frac{1}{(z+2i)} - \frac{1}{8}\frac{1}{(z-2i)}$$

C.A:

- $$\frac{1}{4z} = \frac{1}{4}\frac{1}{2i+(z-2i)} = \frac{1}{8i}\frac{1}{1-\left[\frac{-(z-2i)}{2i}\right]} = \frac{1}{8i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^n}(z-2i)^n$$

- $$\frac{-1}{8}\frac{1}{(z+2i)} = \frac{-1}{8}\frac{1}{4i+(z-2i)} = \frac{-1}{8}\frac{1}{4i}\frac{1}{1-\left[\frac{-(z-2i)}{4i}\right]}$$

$$= \frac{-1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4i)^{n+1}}(z-2i)^n$$

Por lo tanto, en el anillo $\mathcal{D} = \{z : 0 < |z - 2i| < 2\}$:

$$f(z) = -\frac{1}{8}\frac{1}{(z-2i)} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}\left[1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right](z-2i)^n$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{1}{(z-2i)} - \frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{2^{2n+3}}\left[2^{n+2} - 1\right](z-2i)^n$$

$\Rightarrow z = 2i$ es un polo de orden $m = 1$ con residuo

$$Res(f, z = 2i) = -\frac{1}{8} \checkmark$$

b) Serie de Laurent en $\mathcal{A} = \{z : 2 < |z - 2i| < 4\}$

$$2 < |z - 2i| < 4 \Leftrightarrow \frac{2}{|z-2i|} < 1 \ \wedge \ \frac{|z-2i|}{4} < 1$$

entonces en $\mathcal{A}$:

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{1}{4z} - \frac{z}{4(z^2+4)} = \frac{1}{4z} - \frac{1}{8}\frac{1}{(z+2i)} - \frac{1}{8}\frac{1}{(z-2i)}$$

- $$\frac{1}{4z} = \frac{1}{4}\frac{1}{(z-2i)+2i} = \frac{1}{4(z-2i)}\frac{1}{1-\left[\frac{-2i}{(z-2i)}\right]} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2i)^n}{(z-2i)^{n+1}}$$

- $$\frac{-1}{8(z+2i)} = \frac{-1}{8}\frac{1}{4i+(z-2i)} = \frac{-1}{8}\frac{1}{4i}\frac{1}{1-\left[\frac{-(z-2i)}{4i}\right]} = \frac{-1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4i)^{n+1}}(z-2i)^n$$

Por lo tanto, en el anillo $\mathcal{D} = \{z : 2 < |z - 2i| < 4\}$:

$$f(z) = -\frac{1}{8}\frac{1}{(z-2i)} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2i)^n}{(z-2i)^{n+1}} - \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4i)^{n+1}}(z-2i)^n$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{1}{(z-2i)} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2i)^n}{(z-2i)^{n+1}} + \frac{i}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{4^{n+1}}(z-2i)^n \checkmark$$

$$4 < |z - 2i| \Leftrightarrow \frac{4}{|z - 2i|} < 1$$

entonces en $\mathcal{A}$:

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 4)} = \frac{1}{4z} - \frac{z}{4(z^2 + 4)} = \frac{1}{4z} - \frac{1}{8}\frac{1}{(z + 2i)} - \frac{1}{8}\frac{1}{(z - 2i)}$$

Singularidad esencial

Se dice que f tiene una singularidad esencial en z_0 si ocurren cualquiera de las siguientes situaciones equivalentes:

- No existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que el límite

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = L \in \mathbb{C}$$

- La parte singular de la serie de Laurent de f en $\mathcal{D} : 0 < |z - z_0| < R$ tiene infinitos términos con potencias negativas:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \, : \; 0 < |z - z_0| < R$$

con infinitos $a_{-n} \neq 0$, para algún $R > 0$ ó $R = +\infty$

Serie de Laurent en cada tipo de singularidad

Los tipos de singularidades aisladas se caracterizan por su serie de Laurent en el anillo $\mathcal{D} : 0 < |z - z_0| < R$:

- singularidad evitable: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$
- polo de orden $m > 0$:

$$f(z) = a_{-m} \frac{1}{(z - z_0)^m} + \cdots + a_{-1} \frac{1}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- singularidad esencial:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Singularidad Aislada de tipo Esencial

Singularidad Esencial

Ejercicio 6. a) Comprobar que

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

Solución: $z = 0 \notin \text{Dom}(f) \Rightarrow z = 0$ es una singularidad aislada

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n \; : \; w \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow$ evaluemos en $w = \frac{1}{z}$ para $z \neq 0$:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \; \forall z \neq 0$$

¡la serie tiene infinitos términos de potencias negativas!

Ejercicio 6. b)

Analizar las singularidades de f y hallar la serie de Laurent de $f(z) = e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}$ $\forall\ 0 < |z-1|$

• f tiene una singularidad esencial en $z = 1$ pues su serie de Laurent en el anillo $0 < |z-1|$ tiene infinitos términos de potencias negativas:

$$f(z) = e^{-\frac{1}{(z-1)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z-1)^{2n}}$$

Además, veamos que no existe el límite cualquiera sea m cuando $z \to 1$:

• $z_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 1} (z-z_0)^m f(z) = \lim_{n\to\infty} (z-z_0)^m f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n^2} = 0$$

- $z_n = 1 + \frac{i}{n} \to 1$ entonces, cualquiera sea m:

$$\Rightarrow \lim_{z\to 1} |z_n - z_0|^m |f(z_n)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|i^m|}{n^m} |e^{-\frac{n^2}{i^2}}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^m} e^{n^2} = +\infty$$

pues al cabo de m pasos de L´Hopital, el denominador vale $m!$ y el numerador sigue tendiendo a $+\infty$
Acabamos de comprobar que cualquiera sea m, el límite anterior no da un número $0 \neq L \in \mathbb{C}$, por lo cual no es un polo ni una singularidad evitable ✓

En realidad, hace falta comprobar menos: alcanza ver que no existe el límite de $f(z)$ y el límite del módulo no da $+\infty$:

- $z_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2} = 0$$

- $z_n = 1 + \frac{i}{n} \to 1$ entonces

$$\Rightarrow \lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n^2}{i^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n^2} = +\infty \checkmark$$

Ejercicio 6. c)

Resolver $\int_C e^{-\frac{1}{(z-1)^2}} dz$ si $C : |z| = R$ se recorre una vez en sentido antihorario, $0 < R \neq 1$

Solución: Por el Teorema de Cauchy, con $z = 1$ fuera de $\Omega : |z| < R$

$$\bullet \; Si \; 0 < R < 1 \Rightarrow \int_C e^{-\frac{1}{(z-1)^2}} dz = 0$$

En cambio, por el Teorema de los Residuos:

$$\bullet \; Si \; 1 < R \Rightarrow \int_C e^{-\frac{1}{(z-1)^2}} dz = 2\pi i \underbrace{Res(f, z = 1)}_{=0} \checkmark$$

PRÁCTICA 6

Singularidades

y

Series de Laurent

Viernes 21/10/2022

- Singularidad evitable

  Ej: $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z}$ en $z = 0$

- Polo de orden $m > 0$

  Ej a) $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z^m}$ en $z = 0$

  Ej b) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z^{m+1}}$ en $z = 0$

Polos de orden m

Ejercicio 1. Analizar el comportamiento y hallar el desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z = \pi$ de

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^4}$$

- f es cociente de holomorfas en $\mathbb{C}$
- Denominador se anula sólo en $z = \pi$
  $\Longrightarrow f$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : z \neq \pi\}$

$$= \textit{ disco centrado en } \pi \textit{ de radio } \infty$$

$\Longrightarrow f$ tiene una singularidad aislada en $z = \pi$ que es un polo de orden 3

Orden del polo= diferencia de los órdenes

Notar que

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^4} = \frac{\textit{cero de orden } 1}{\textit{cero de orden } 4} = \textit{polo de orden } 4-1$$

Serie de Laurent centrada en $z_0 = \pi$

Calculemos la serie de Taylor del numerador:

$$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}((z-\pi)+\pi) = \operatorname{sen}(z-\pi)\cos(\pi) + \cos(z-\pi)\operatorname{sen}(\pi)$$

$$= -\operatorname{sen}(z-\pi)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1} \; : z \in \mathbb{C}$$

Serie de Laurent centrada en $z_0 = \pi$

Derivando también se podría obtener la serie de Taylor en $z = \pi$: $h(z) = \operatorname{sen} z \to h'(z) = \cos z \to h''(z) = -\operatorname{sen} z \to h^{(3)}(z) = -\cos z \to h^{(4)}(z) = \operatorname{sen} z$ etc

$\Longrightarrow h^{(2n)}(z) = (-1)^n \operatorname{sen}(z)$ y $h^{(2n+1)}(z) = (-1)^n \cos(z)$, *entonces*

- $h(\pi) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$
- $h'(\pi) = \cos(\pi) = -1$
- $h''(\pi) = -\operatorname{sen}(\pi) = 0$
- $h^{(3)}(\pi) = -\cos(\pi) = +1$
- $h^{(4)}(\pi) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$ etc

  $\Rightarrow h^{(2n)}(\pi) = 0$ y $h^{(2n+1)}(\pi) = (-1)^{n+1}$

$$\Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty} \frac{(-\mathbf{1})^{\mathbf{n+1}}}{(\mathbf{2n}+\mathbf{1})!}(\mathbf{z}-\pi)^{\mathbf{2n+1}} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}}$$

Serie de Laurent de f

$$\Longrightarrow \operatorname{sen} z = -(z-\pi) + \frac{1}{3!}(z-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(z-\pi)^5 - \frac{1}{7!}(z-\pi)^7 + \dots$$

$$\Longrightarrow \textit{Solo para } z \neq \pi : \; \frac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^4} = \frac{1}{(z-\pi)^4} \cdot \operatorname{sen} z$$

$$= -\frac{1}{(z-\pi)^3} + \frac{1}{3!(z-\pi)} - \frac{(z-\pi)^1}{5!} + \dots$$

$$= -\frac{1}{(z-\pi)^3} + \frac{1}{3!(z-\pi)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n-3}$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1} \ : z \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow$ solo para $z \neq \pi$, $\boxed{\dfrac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^4}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n-3}$

$$= -\frac{1}{(z-\pi)^3} + \frac{1}{3!(z-\pi)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n-3}$$

$$\boxed{= -\frac{1}{(z-\pi)^3} + \frac{1}{6(z-\pi)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+3}}{(2k+5)!}(z-\pi)^{2k+1} \ : 0 < |z-\pi|}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ tiene un polo de orden } m = 3 \text{ en } z = \pi}$

$\boxed{\text{con residuo } a_{-1} = \frac{1}{6} \ \checkmark}$

Caracterización de un polo de cualquier orden

Observemos que:

$$\lim_{z\to\pi} |f(z)| = \lim_{z\to\pi} \frac{|\operatorname{sen} z|}{|z-\pi|^4}$$

L´Hôpital:

$$= \lim_{z\to\pi} \frac{|\cos z|}{4|z-\pi|^3} = +\infty$$

Esto pasa en general, es decir, que, f tiene un polo de algún orden en z_0 si y sólo si el límite no existe pero (de cualquier manera que nos acerquemos a z_0) el límite del módulo de f satisface:

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$$

¿Qué significa que $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$?

Significa que, dado $M > 0$, existe un δ tal que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M$$

Esto es, los puntos $f(z)$ se esparcen en el plano complejo cada vez más lejos del origen, pero no tienden a ningún valor, en particular, no se ubican necesariamente a la derecha sobre el eje $\mathbb{R}$.

Caracterización de un polo de orden m

La forma de comprobar que f tiene un polo de orden $m = 3$ en $z = \pi$ es la sgte:

La Regla de L´ Hôpital permite calcular

$$\boxed{\lim_{z\to\pi}(z-\pi)^3 f(z)} = \lim_{z\to\pi}(z-\pi)^3 \cdot \frac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^4} = \lim_{z\to\pi}\frac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)} =$$

$$\lim_{z\to\pi}\frac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)} = \lim_{z\to\pi}\frac{\cos z}{1} = \cos\pi = -1 \boxed{= a_{-3} \neq 0}$$

Definición Polo de orden m

Una singularidad aislada z_0 de f es un polo de orden m si en $\mathbb{C}$ existe el límite

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) = L \neq 0$$

Equivalentemente, f tiene un polo de orden m en z_0 si la serie de Laurent de f en el anillo $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ es de la forma

$$f(z) = a_{-m}\frac{1}{(z-z_0)^m} + a_{-(m-1)}\frac{1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + a_{-1}\frac{1}{(z-z_0)}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n : \ con\ a_{-m} = L \neq 0$$

Diferencia de órdenes = orden del polo

Propiedad: Si $f = \frac{g}{h}$ cociente de funciones holomorfas tales que z_0 es un cero de orden k de g y z_0 un cero de orden n de h, entonces

- Si $k = n \Longrightarrow z_0$ es una singularidad evitable de $f = \frac{g}{h}$ con $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L \neq 0$
- Si $k > n \Longrightarrow z_0$ es una singularidad evitable de $f = \frac{g}{h}$, que es un cero de orden $k - n$ de la extensión holomorfa de f, es decir $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$
- Si $k < n \Longrightarrow z_0$ es un polo de orden $m = n - k$ de $f = \frac{g}{h}$ con $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^{n-k} f(z) = L \neq 0$

Tipos de Singularidades aisladas

f tiene una singularidad aislada en z_0 si f es holomorfa en un anillo de la forma

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$$

para $R > 0$ ó $R = \infty$, pero no en z_0.

Las singularidades aisladas pueden ser de tres tipos:

- singularidad evitable
- polo de orden $m > 0$
- singularidad esencial: por definición es aquella singularidad asilada que no es del tipo de las dos anteriores

Teorema de los residuos

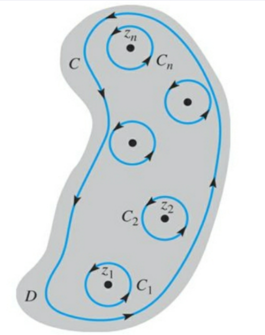
Sea $\Omega \subset U$ con Ω un dominio simplemente conexo, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa salvo a lo sumo en una cantidad finita de singularidades aisladas $z_1, \ldots, z_N \in \Omega$ y sea $\sigma = \partial\Omega$, recorrida una única vez en sentido positivo, entonces

$$\int_\sigma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{N} Res(f, z_n)$$

La integral es $2\pi i$ por la suma de los residuos de f en

todas las singularidades

que pertenecen a la región cuya frontera es la curva



Ejercicio 2. a) Hallar y clasificar todas las singularidades de

$$f(z) = \frac{z}{\text{sen } z}$$

b) Calcular $\int_{\sigma} \frac{z}{\text{sen } z}\, dz$ si $\sigma : |z - \pi| = 4$ se recorre una sola vez en sentido antihorario.

Solución:

- $h(z) = \text{sen}(z) = 0 \Leftrightarrow z_n = n\pi$, ceros de orden $m = 1$
- $z_n = n\pi : \; n \in \mathbb{Z}$ son singularidades aisladas:

$$z_n = n\pi : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \text{ son polos de orden } m = 1$$

$$L := \lim_{z \to n\pi} (z - n\pi) f(z) = \lim_{z \to n\pi} \frac{(z - n\pi)z}{\text{sen } z} = \lim_{z \to n\pi} z \lim_{z \to n\pi} \frac{1}{\cos z} = n\pi(-1)^n \neq 0$$

Polos de orden $m = 1$ en $z_n = n\pi : n \neq 0$

El límite anterior es el residuo:

$$Res(f, z = n\pi) = \lim_{z \to n\pi} (z - n\pi) f(z) = n\pi(-1)^n$$

luego

- $Res(f, z = \pi) = -\pi$
- $Res(f, z = 2\pi) = 2\pi$

$z = 0$ es una singularidad evitable de f

- $z = 0$ es una singularidad evitable de f pues existe el ímite de la función:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{sen}\ z} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos\ z} = 1 \checkmark$$

- La serie de Laurent en el anillo $0 < |z| < \pi$ tiene el aspecto de una serie de Taylor con residuo cero y $a_0 = 1$:

$$\frac{z}{\operatorname{sen}\ z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Se dice que f es meromorfa si es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ salvo en singularidades aisladas de tipo evitables o polos.

- $f(z) = \dfrac{z}{sen\ z}$ es meromorfa
- $f(z) = \dfrac{1}{z(\cos(z) - 1)}$ es meromorfa

b) Calcular $\int_\sigma \frac{z}{sen\ z}\, dz$ si $\sigma : |z - \pi| = 4$ se recorre una sola vez en sentido antihorario.

Solución:

- $\sigma : |z - \pi| = 4 \Rightarrow$ la región es $\Omega : |z - \pi| < 4$
- $z_0 = 0,\ z_1 = \pi,\ z_2 = 2\pi \in \Omega$,
- $z_n \notin \Omega \ : n \neq 0,\ 1,\ 2$

TEOREMA DE LOS RESIDUOS:

$$\int_\sigma f(z)\, dz = 2\pi i\ [(Res(f, z = 0) + Res(f, z = \pi) + Res(f, z = 2\pi))]$$

Notar que: Cada curva divide al plano en 2 regiones, una acotada y la otra no acotada, por lo cual, aún si f tiene Infinitas Singularidades Aisladas, sólo una cantidad finita de ellas van a quedar en el interior de la curva.

Importante: Esto vale pues las funciones que estamos considerando tienen sólo Singularidades Aisladas

$$\boxed{Res(f, z = z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m \cdot f(z)\right)}$$

$$Si\ m = 1 \Rightarrow \boxed{Res(f, z = z_0) = \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0) \cdot f(z)\right)}$$

En este caso, hay polos de orden $m = 1$ en $z = \pi$ y en $z = 2\pi$:

- $$Res(f, z = \pi) = \lim_{z \to \pi} \left((z - \pi) \cdot \frac{z}{\text{sen } z}\right) = \lim_{z \to \pi} z \lim_{z \to \pi} \frac{z}{\text{sen } z}$$
  $$= \pi \lim_{z \to \pi} \frac{1}{\cos \pi} = -\pi$$

- $$Res(f, z = 2\pi) = \lim_{z \to 2\pi} \left((z - 2\pi) \cdot \frac{z}{\text{sen } z}\right) = \lim_{z \to 2\pi} z \lim_{z \to 2\pi} \frac{z}{\text{sen } z}$$
  $$= 2\pi \lim_{z \to 2\pi} \frac{1}{\cos(2\pi)} = 2\pi$$

Atención: Los límites anteriores son los que calculamos para comprobar que los $z_n = n\pi$ son polos de orden $m = 1$, si $n \neq 0$.

Por otra parte, $Res(f, z = 0) = 0$ dado que $z = 0$ es singularidad evitable. Por lo tanto,

$$\int_\sigma \frac{z}{\operatorname{sen}(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{2} Res(f, z_n)$$

$$= 2\pi i\, (Res(f, z = 0) + Res(f, z = \pi) + Res(f, z = 2\pi))$$

$$= 2\pi i\, (0 - \pi + 2\pi) = 2\pi^2 i \checkmark$$

Ejercicio 3. a) Hallar y clasificar todas las singularidades de $f(z) = \dfrac{1}{z(\cos(z) - 1)}$.
b) Calcular $\int_\sigma \frac{1}{z(\cos(z)-1)}\, dz$ si $\sigma : |z| = 4$.

- $h(z) = z(\cos(z) - 1) = 0 \Leftrightarrow w_n = 2n\pi$, ceros de orden 2, $\forall\ n \neq 0$
- $z = 0$ es cero de orden $m = 3$ de h
- $f(z) = \dfrac{1}{z(\cos(z) - 1)}$ cociente de holomorfas en
$$U = \{z \neq 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$
- $w_n = 2n\pi$ son polos de orden $m = 2$
pero $z = 0$ es polo de orden $m = 3$ de f

ORDEN DEL POLO: COMPROBACIÓN EN TODOS LOS $w_n = 2n\pi \neq 0$

$$a_{-2} = -2 = \lim_{z \to 2n\pi} \left[(z - 2n\pi)^2 \cdot f(z) \right] = \lim_{z \to 2n\pi} \frac{(z - 2n\pi)^2}{z(\cos(z) - 1)}$$

$$= \lim_{z \to w_n} \frac{1}{z} \lim_{z \to w_n} \frac{2(z - 2n\pi)}{-\operatorname{sen}(z)}$$

$$= \frac{1}{2n\pi} \lim_{z \to 2n\pi} \frac{2}{-\cos(z)} = \frac{-1}{n\pi} = L \neq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$$

En particular, para cada serie de Laurent centrada en w_n, obtuvimos $a_{-2} = \frac{-1}{n\pi},\ n \neq 0$

b) Integral de línea: Teorema de los residuos

- $\sigma : |z| = 4 \Rightarrow$ la región es $\Omega : |z| < 4$
- $w_0 = 0 \in \Omega$
- $w_n \notin \Omega \;\; : n \neq 0$

Teorema de los residuos $\Rightarrow \displaystyle\int_\sigma f(z)\, dz = 2\pi i \underbrace{Res(f, z = 0)}_{a_{-1}}$

Dado que $w_0 = 0$ es polo de orden $m = 3$, su serie:

$$f(z) = \frac{1}{z(\cos(z) - 1)} = \frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : 0 < |z| < 2\pi$$

$$\iff 1 = f(z) \cdot z \cdot [\cos(z) - 1]$$

$$\iff 1 = \left[\frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right] \cdot z \left[-\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{z^3}\left[a_{-3} + a_{-2}z + a_{-1}z^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+2}\right] \cdot z^3 \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4!}z^2 - \frac{1}{6!}z^4 + \dots\right]$$

$$= \left[a_{-3} + a_{-2}z + a_{-1}z^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+3}\right] \cdot \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4!}z^2 - \frac{1}{6!}z^4 + \dots\right]$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}a_{-3}}_{=1} - \underbrace{\frac{1}{2}a_{-2}}_{=0} z + \underbrace{\left[-\frac{1}{2}a_{-1} + \frac{1}{24}a_{-3}\right]}_{=0} z^2 + \dots$$

O sea, el lado izquierdo es igual a 1, por lo cual, la constante es 1 y los demás coeficientes del resultado del lado derecho son ceros, de donde se despejan los valores:

$$\Rightarrow \boxed{a_{-3} = -2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{-2} = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{-1} = -\frac{1}{6}} \checkmark$$

- $\boxed{Res(f, z = z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m \cdot f(z)\right)}$
- Si $m = 3 \Rightarrow$ $\boxed{Res(f, z = z_0) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2} \left((z - z_0)^3 \cdot f(z)\right)}$

En este caso, entonces

- $Res(f, z = 0) = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^2 \cdot \frac{1}{\cos(z) - 1} \right]$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{\left[2z(\cos(z) - 1) + z^2 \cdot \mathrm{sen}(z)\right]}{(\cos(z) - 1)^2}$$

Etc: es largo, por lo cual en este caso preferimos el cálculo anterior por producto de Cauchy.

Por lo tanto,

$$\Rightarrow \int_\sigma \frac{1}{z(\cos(z)-1)}\, dz = 2\pi i\, (Res(f, z=0))) = -\frac{1}{3}\pi i \checkmark$$

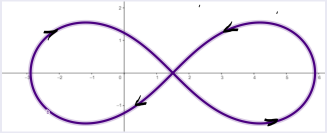
Ejercicio 4.

a) Clasificar todas las singularidades de f y hallar el residuo en cada una de ellas si

$$f(z) = (5 + 3z)\left[\cos\left(\frac{1}{z-1}\right) + \frac{1}{(z+2)^2}\right]$$

b) Resolver la integral $\int_\gamma f(z)dz$ si $\gamma : |z - i| = 5$ está positivamente orientada y se recorre una única vez.

c) Resolver $\int_\sigma f(z)dz$ si σ está orientada como en el dibujo y se recorre una única vez



Solución: • $z = 1$ es una singularidad esencial

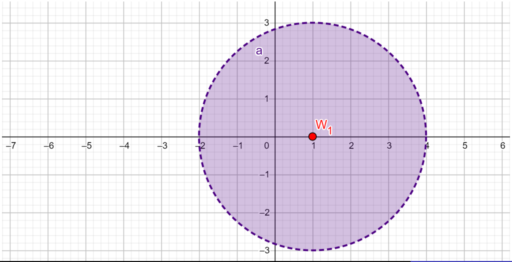
• $z = -2$ es un polo de orden $m = 2$

- $z = 1$ es una singularidad esencial:

$$f(z) = (5+3z)\ \cos\left(\frac{1}{z-1}\right) + \underbrace{(5+3z)\frac{1}{(z+2)^2}}_{holomorfa\ \ en\ \ |z-1|<3}$$

$$= g(z) + \underbrace{h(z)}_{holomorfa}$$

$$\Rightarrow Res(f, z=1) = Res(g, z=1)$$



Recordemos la serie de Taylor centrada en $z = 0$

$$cos(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\Rightarrow g(z) = (5 + 3z)\ \cos\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

$$= [8 + 3(z-1)] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}}\right]$$

$$= [8 + 3(z-1)] \left[1 - \frac{1}{2(z-1)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}}\right] \quad \forall |z-1| < 3$$

$$= [8 + 3(z-1)] \left[1 - \frac{1}{2(z-1)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \underbrace{\frac{1}{(z-1)^{2n}}}_{potencias\ k \geqslant 4} \right]$$

$$= 8 + 3(z-1) - \frac{3\cancel{(z-1)}}{2(z-1)^{\cancel{2}}} - \frac{8}{2(z-1)^2} + [8 + 3(z-1)] \sum_{n=2}^{\infty} \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{Res(f, z=1) = a_{-1} = -\frac{3}{2}}$$

Notar que el único cálculo posible del residuo en una singularidad esencial es a través de la serie de Laurent en el anillo $0 < |z-1| < 3$, donde

$$Res(f, z=1) = a_{-1}$$

- $z = -2$ es un polo de orden $m = 2$.

Análogamente, en la región $|z+2| < 3$:

$$f(z) = (5+3z)\left[\cos\left(\frac{1}{z-1}\right) + \frac{1}{(z+2)^2}\right]$$

$$= \underbrace{g(z)}_{holomorfa} + (5+3z)\frac{1}{(z+2)^2}$$

$$= g(z) + [-1 + 3(z+2)]\frac{1}{(z+2)^2}$$

$$= g(z) - \frac{1}{(z+2)^2} + 3\frac{\cancel{(z+2)}}{(z+2)^{\cancel{2}}}$$

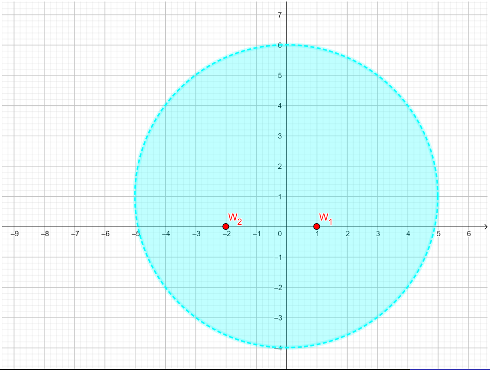
$$= g(z) - \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{3}{(z+2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{Res(f, z=-2) = 3}$$

b) Resolver la integral $\int_\gamma f(z)dz$ si $\gamma : |z-i| = 5$ está positivamente orientada y se recorre una única vez

- Llamemos $\Omega : |z-i| < 5$, la región cuya frontera es la curva.

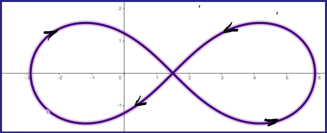
- $z = 1 \in \Omega$ pues $|1-i| = \sqrt{2} < 5$
- $z = -2 \in \Omega$ pues $|-2-i| = \sqrt{5} < 5$



$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \left[Res(f, z = 1) + Res(f, z = -2)\right]$$

$$= 2\pi i \left[-\frac{3}{2} + 3\right] = \boxed{3\pi i}$$

c) Resolver $\int_\sigma f(z)dz$ si σ está orientada como en el dibujo y se recorre una única vez



Solución: • Llamemos Ω, la región cuya frontera es la curva.

• $z = 1, \; z = -2 \in \Omega$

$\boxed{\sigma \text{ es la concatenación de } \sigma_1 \text{ y } \sigma_2\text{, c/u con su orientación}}$

• σ_1 y σ_2 son similares a una circunferencia

• σ_2, negativamente orientada, rodea a $z = -2, z = 1$

$$\Rightarrow \int_\sigma f(z)dz = \int_{\sigma_1} f(z)dz + \int_{\sigma_2} f(z)dz$$

$$= 0 - 2\pi i \left[Res(f, z = 1) + Res(f, z = -2)\right] = \boxed{-3\pi i}$$

En item b), dado que f tiene sólo una cantidad finita de singularidades, y todas en el interior de la curva, se podría haber calculado:

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left[Res(f, z = 1) + Res(f, z = -2)\right]$$

$$= 2\pi i \, Res(f, z = \infty) = -2\pi i \, Res\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), z = 0\right] = \boxed{3\pi i}$$

Lo mismo en c) cambiando el signo.