FCEyN - 1ro 2022
MATEMÁTICA 4
Práctica 1

## Proyección Estereográfica

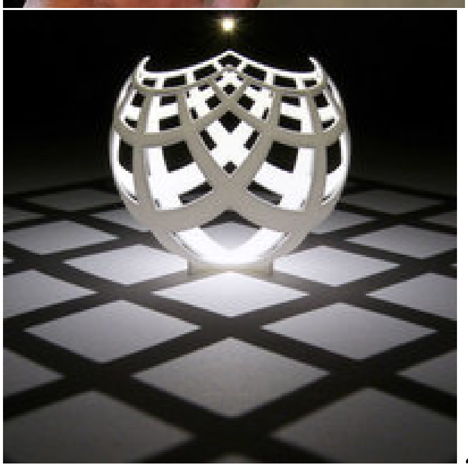
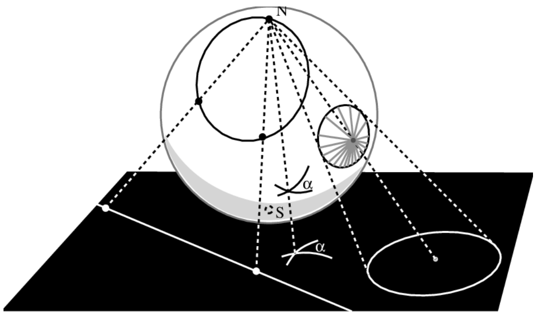
La proyección estereográfica es la que se logra colocando un globo terráqueo transparente frente a una pantalla, y una fuente de luz en algún punto de la superficie del globo. Sobre la pantalla quedará proyectado el mapa de la tierra (salvo un punto). De esta manera, tenemos una correspondencia biyectiva entre la superficie de la esfera quitándole un punto (por convención, el polo norte) y el plano.

$$S^2 - \{N\} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

Una interpretación de la esfera completa (es decir, con el polo norte incluido), vista desde el plano, es que al plano se le ha agregado "un punto nuevo en el infinito":

$$S^2 \longleftrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \hat{\mathbb{C}}$$

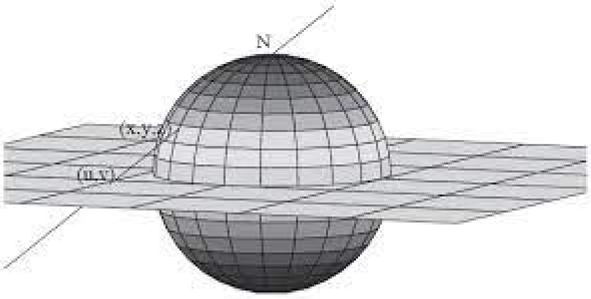


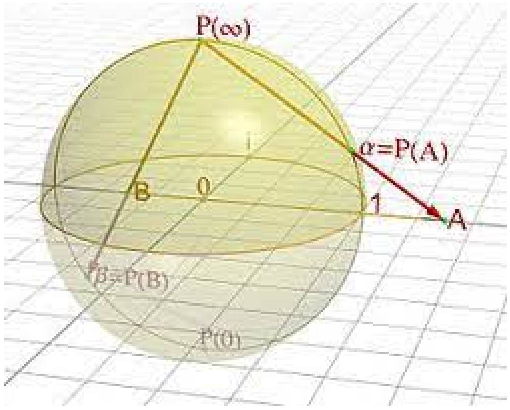



## Proyección Estereográfica

Una biyección posible: se obtiene proyectando sobre el plano $\mathbb{C}$ puesto de forma horizontal sobre el Ecuador, la cual lleva:

- Polo Norte $\mapsto \infty$
- Hemisferio Superior, sin el Polo Norte, $\mapsto \{z : |z| > 1\}$
- Ecuador $\mapsto \{z : |z| = 1\}$
- Hemisferio Inferior (Sur) $\mapsto \{z : |z| < 1\}$ = Disco Unidad



## TOPOLOGÍA DE $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$

Los abiertos de la esfera son de 2 tipos:

• Todo abierto que no contiene al polo norte $\mapsto$ un abierto usual del plano

• Todo abierto que contiene al polo norte $\mapsto$ $\{\infty\} \cup$ complemento de algún compacto en $\mathbb{C}$, o sea:
Discos abiertos centrados en PN $\mapsto$ $\{\infty\} \cup$ complemento de un disco cerrado centrado en $z = 0$

Consecuencias:

•El complemento de un abierto es cerrado en la esfera y allí, todo cerrado es compacto.

• Si $F$ es un semiplano con la recta del borde, entonces $F \cup \infty$ es compacto en $\hat{\mathbb{C}}$

## Homografías

Una homografía es una función del tipo

$$\boxed{H(z) = \frac{az+b}{cz+d} \; : \; ad - bc \neq 0}$$

Si denotamos al plano completado $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, entonces $H$ está bien definida y es continua y biyectiva:

$$H : \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$$

Cada $H$ se corresponde con una transformación biyectiva de la esfera de Riemann en sí misma.

A cada homografía $H$ de la forma anterior le asociamos la matriz de sus coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times2}$. Es decir

$$H_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times2}$$

Si $ad - bc = 0 \Longrightarrow H(z) = \text{constante } \forall z$

Propiedades:

- Matriz diagonal $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times2}$ da la homografía

$$H(z) = \frac{a}{d} z$$

- La matriz escalar $A = \lambda \, Id$ da la homografía $H(z) = z \; \forall z$, cualquier sea $\lambda \neq 0$

- La homografía dada por $A$ y por $\lambda A$ es la misma función, y, recíprocamente,

$$H_A = H_B \iff B = \lambda A$$

Pues si $B = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ y consideramos $H = H_B$:

$$H_B(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{\lambda}{\lambda} H_A(z)$$

- La composición se corresponde con el producto de matrices en la forma

$$H_A \circ H_B = H_{AB} \quad y \quad H_{A^{-1}} = H_A^{-1}$$

- Para cada matriz inversible $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \quad ad - bc \neq 0$, tenemos

$$A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Longrightarrow H_A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \left( \frac{dz-b}{-cz+a} \right)$$

$$\Longrightarrow H_A^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

Ejercicio: verificar que $H_A \circ H_{A^{-1}} = Id$.

- Si $c \neq 0$, entonces

$$\boxed{H_A : -d/c \mapsto \infty}$$

Pues

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \infty,$$

donde por definición

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$$

- $\boxed{H_A : \infty \mapsto a/c}$

Pues

$$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{|z| \to +\infty} \frac{|z|}{|z|} \frac{a + \frac{b}{|z|}}{c + \frac{d}{|z|}} = \lim_{|z| \to +\infty} \frac{a + \frac{b}{|z|}}{c + \frac{d}{|z|}} = \frac{a}{c}$$

Ejemplo: $H(z) = \dfrac{iz+2}{3z-5i}$ lleva $\quad \bullet H : \dfrac{5i}{3} \mapsto \infty$

$\bullet\ H : \infty \mapsto \dfrac{i}{3}$

Propiedades geométricas:

1. Toda homografía manda cada recta en una recta o circunferencia

y cada circunferencia en una recta o circunferencia

2. Toda homografía queda determinada por su efecto en tres puntos cualesquiera

3. Toda homografía es composición de una traslación, una rotación, expansión-contracción

y una inversión

Dem: Definamos como homografías elementales a

- Traslación:

$$E_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow T(z) = z + \lambda$$

- Rotación: $R(z) = e^{i\theta} z : \ \theta \in \mathbb{R}$

- Dilatación-contracción: $D(z) = az : a \in \mathbb{R},\ a > 0$
- Ó bien, una composición de ambas consideradas en una misma operación, la de multiplicar por un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$, llamada homotecia compleja, $\lambda = re^{i\theta}$ : $\theta \in \mathbb{R},\ r > 0$:

$$E_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow D(z) = \lambda z = re^{i\theta} z$$

- Inversión:

$$P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow I(z) = \frac{1}{z}$$

En efecto, toda matriz $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ es composición de matrices elementales, que producen las operaciones de filas y columnas y que se corresponden con homografías elementales. Geométricamente, dada

$$\boxed{H(z) = \frac{az + b}{cz + d} : \ ad - bc \neq 0}$$

- Si $c = 0$ entonces $H(z) = \dfrac{az + b}{d} = T_{\frac{b}{d}} \circ D_{\frac{a}{d}}(z)$, es decir:

$$z \mapsto \frac{a}{d} z \mapsto \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = \frac{az + b}{d} = H(z)$$

• Si $c \neq 0$ entonces

$$H(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) - \frac{a}{c}d + b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{-ad}{c} + b\right)\frac{1}{(cz+d)}$$

que es la composición de las operaciones

$$z \xmapsto{D_c} cz \xmapsto{T_d} cz{+}d \xmapsto{I} \frac{1}{cz+d} \xmapsto{D_{-\frac{ad}{c}+b}} \left(\frac{-ad}{c} + b\right)\frac{1}{(cz+d)} \xmapsto{T_{\frac{a}{c}}} \frac{a}{c} + \left(\frac{-ad}{c} + b\right)\frac{1}{(cz+d)}$$

Otras definiciones:

• Homotecias reales: con $a \in \mathbb{R}$ es una expansión (dilatación) o contracción: $H(z) = az$, es decir, si $|a| > 1$, el resultado es un complejo más largo, i.e. de módulo mayor que $|z|$, y lo contrario si $|a| < 1$, pero el argumento no cambia si $a > 0$.

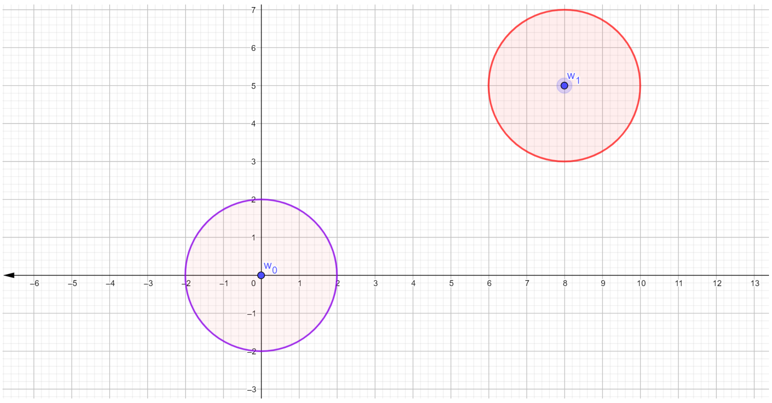
Si $a < 0$ y arg(z)= $\theta \Longrightarrow$ el argumento de $H(z) = az$ es $\pi + \theta$

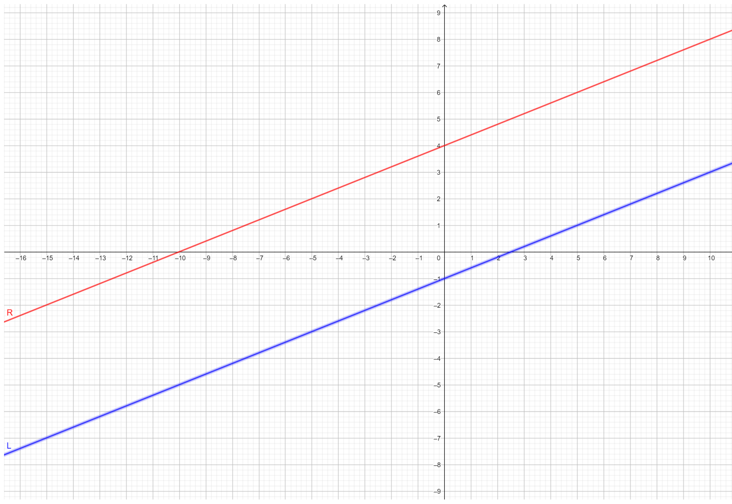
• Homotecias con centro en $z_0$: $H(z) = a(z - z_0) + z_0$

## Práctica 1: Ejercicio 8

Efecto sobre rectas y circunferencias de Traslaciones, Homotecias, Rotaciones, Inversiones:

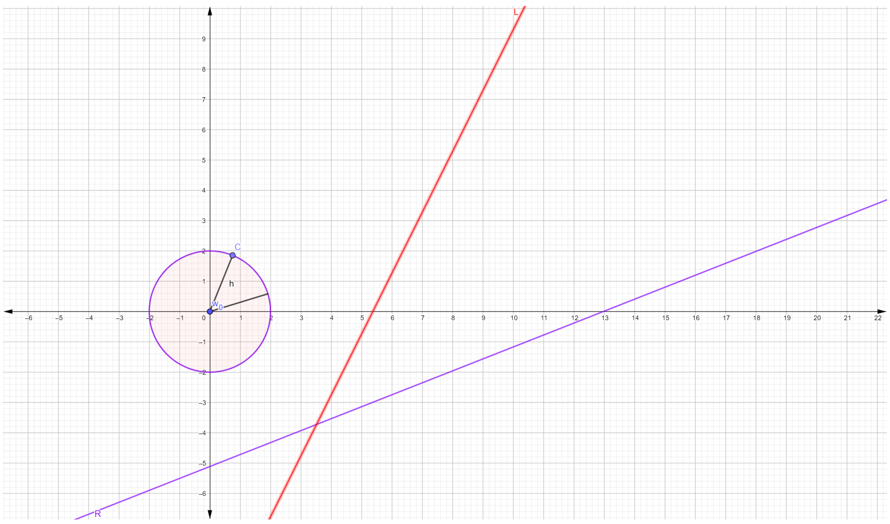
- Traslación: $T_{z_0} : A = \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \Longrightarrow T(z) = z + z_0$





- Rotación: $H(z) = e^{i\theta}z \ : \theta \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ caso especial de homotecia con $z_0 = 0$ y $a = e^{i\theta}$ corresponde a la matriz

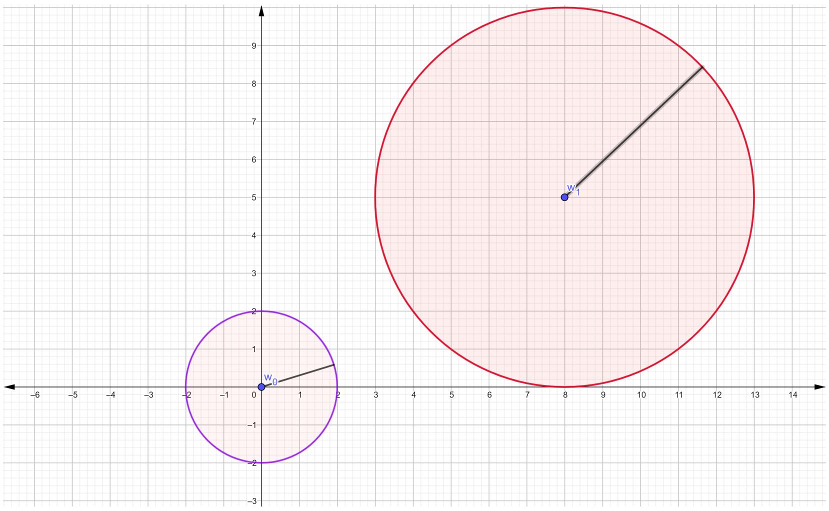
$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$



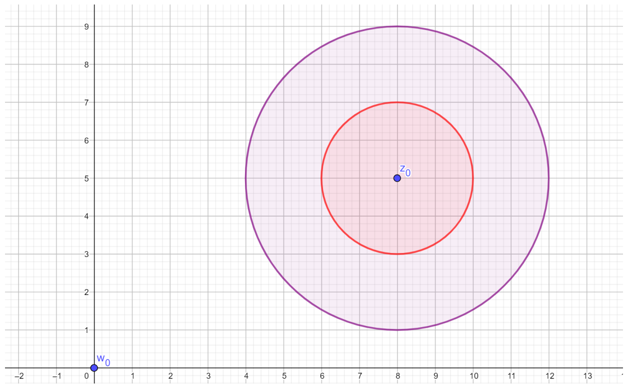
$Recta\ L := \left\{z = v + tw : t \in \mathbb{R}\right\} \mapsto \tilde{L} := \left\{H(z) = e^{i\theta}v + te^{i\theta}w : t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\tilde{v} + t\tilde{w} : t \in \mathbb{R}\right\}$

Observación: Las rotaciones son isometrías, es decir, preservan la norma de los vectores; por lo tanto, el punto más cercano al origen de $L$ va al punto más cercano al origen de $\tilde{L}$.

- Homotecia compleja $\Longrightarrow$ $H(z) = re^{i\theta}z$ es la homotecia real = multiplicar por el factor de escala $r$, compuesta con la rotación de ángulo $\theta$

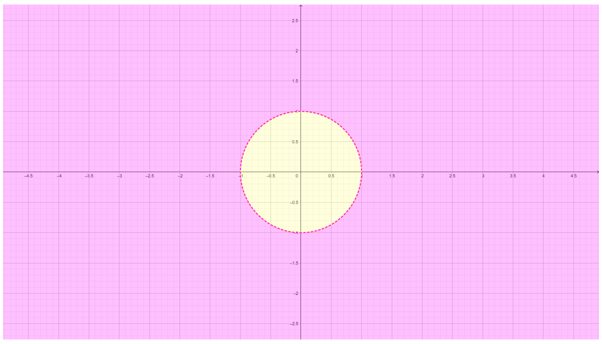


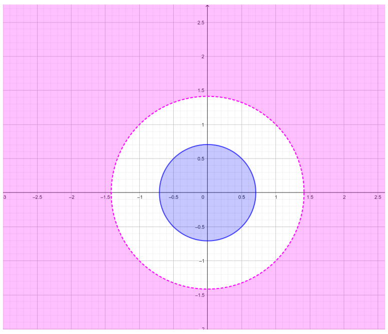
$H(z) = re^{i\theta}z + w_1$



$H(z) = a(z - z_0) + z_0 \ : a \in \mathbb{C}$

• Inversión: $H(z) = \dfrac{1}{z} \longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$





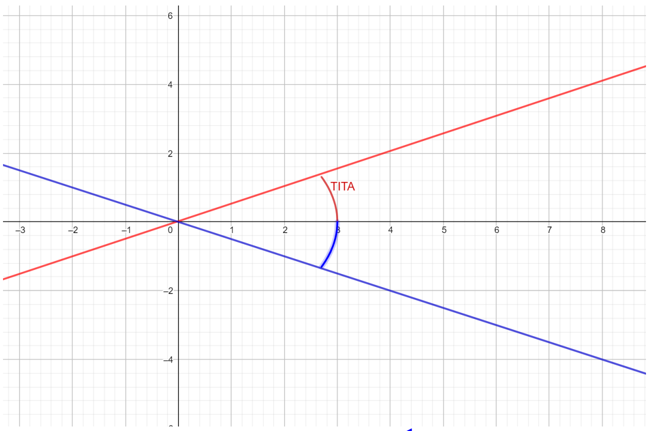
$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} \overset{H}{\mapsto} \left\{w \in \mathbb{C} : |w| > \frac{1}{r}\right\} \; donde\; w = \frac{1}{z}$$

• La imagen de una recta que pasa por el origen es otra recta que pasa por el origen,

es decir, $0 \mapsto \infty$; además, si $\theta$ está fijo,

$$L = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta}, r > 0, r \in \mathbb{R}\} \cup \{u = re^{i(\theta+\pi)}, r > 0, r \in \mathbb{R}\} \cup \{0\} : \theta \text{ fijo } \in \mathbb{R}$$

$$\mapsto^{H} \{w \in \mathbb{C} : w = \frac{1}{r}e^{-i\theta}, r > 0, r \in \mathbb{R}\} \cup \{w = \frac{1}{r}e^{-i(\theta+\pi)}, r > 0, r \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$$




Rojo: $z = re^{i\theta} \mapsto$ azul: $H(z) = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$

• La imagen por $H$ de una recta que no pasa por el origen

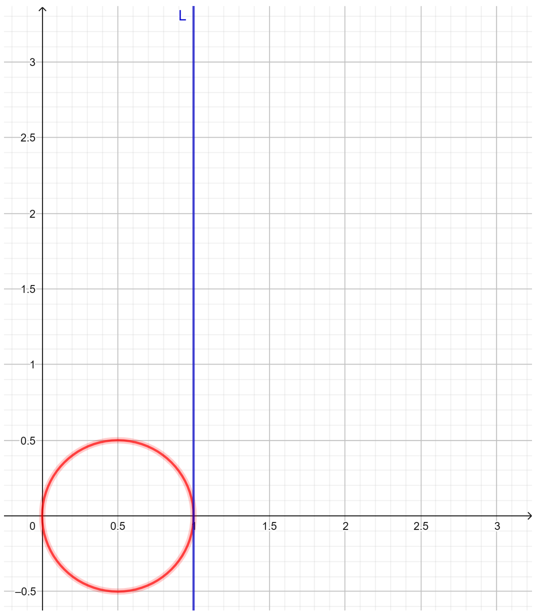
es una circunferencia que pasa por el origen

Lema 1: la imagen de la recta vertical del plano $\mathbb{C}$ parametrizada por $L : z = 1 + it$ por $H(z) = \dfrac{1}{z}$ es la circunferencia

$$H(L) = \left\{ w : \left| w - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}$$

Dem: Apliquemos la homografía a la recta $L : z = 1+it$: $\Longrightarrow H(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1+it}$

$$\Longrightarrow \left| H(z) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{1+it} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2-1-it}{2(1+it)} \right| = \left| \frac{1-it}{2(1+it)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1-it}{(1+it)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = \frac{1}{2} \checkmark$$




Lema 2: la imagen por $H(z) = \dfrac{1}{z}$ de una recta cualquiera, que no pasa por el origen, es una circunferencia que pasa por el origen. Más precisamente, si $L : z(t) = z_0 + \omega_0 t : t \in \mathbb{R}$ donde $z_0$ y $\omega_0$ son vectores no nulos, mutuamente perpendiculares, su imagen por $H$ es la circunferencia

$$H(L) = \left\{ w : \left| w - \frac{1}{2z_0} \right| = \frac{1}{2} \frac{1}{|z_0|} \right\}$$

Dem: Notar que, dado que $z_0$ y $\omega_0$ son vectores perpendiculares, podemos escribir $\omega_0 = \pm i z_0$ (donde además estamos eligiendo como vector directriz a uno que tenga el mismo módulo que $z_0$).

Comprobemos entonces que la distancia de $H(z)$ a $\dfrac{1}{2z_0}$ es constante:

$$\left|H(z) - \frac{1}{2z_0}\right|$$

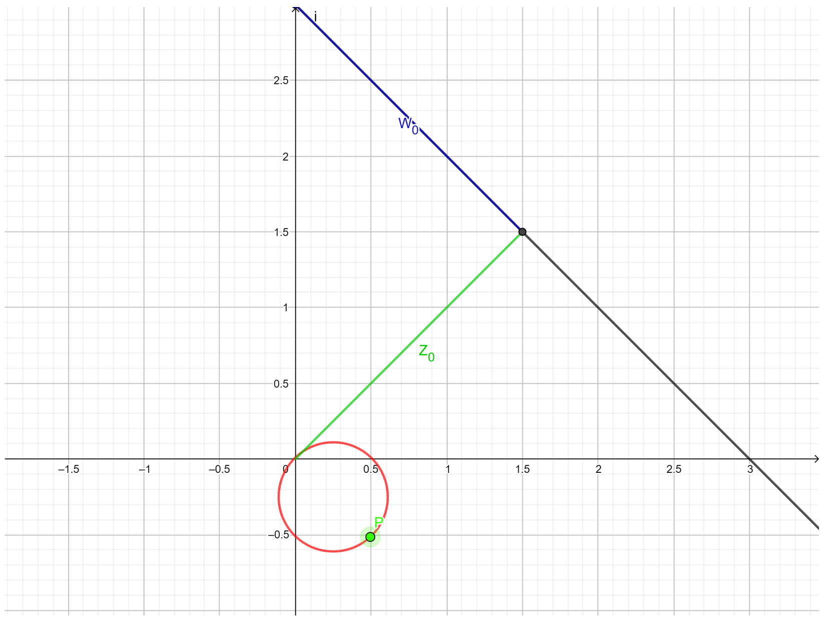
$$= \left|\frac{1}{z_0(1 \pm ti)} - \frac{1}{2z_0}\right| = \left|\frac{1}{z_0}\right|\left|\frac{1}{(1 \pm ti)} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{|z_0|}\frac{1}{2}\left|\frac{1 \pm it}{(1 \pm it)}\right| = \frac{1}{2\,|z_0|}$$

$\Longrightarrow$ la imagen de $L$ por la inversión es la circunferencia

de centro en $\dfrac{1}{2z_0}$ y radio $\dfrac{1}{2|z_0|}$

Atención: esta circunferencia pasa por el origen pues $w = 0$ satisface la ecuación que define a la circunferencia anterior

$H(L)$




$L$

$P = \dfrac{1}{z_0}$ pertenece a la circunferencia $H(L)$

Ejemplos 1. Determinar la única función homográfica que lleva:

$$\{0,\ -i,\ -1\} \mapsto \{i,\ 1,\ 0\} \textit{ en ese orden}$$

Solución: Queremos determinar $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tal que

$$H_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}:$$

$$H(0) = i, \quad H(-i) = 1, \quad H(-1) = 0, \quad \text{luego}$$

$$\boxed{H(0) = \frac{b}{d} = i, \quad H(-i) = \frac{a(-i)+b}{c(-i)+d} = 1, \quad H(-1) = \frac{a(-1)+b}{c(-1)+d} = 0,}$$

entonces

$$d = -bi, \qquad 1 = \frac{-ai+b}{-(b+c)i} = \frac{a+bi}{b+c}, \quad b = a$$

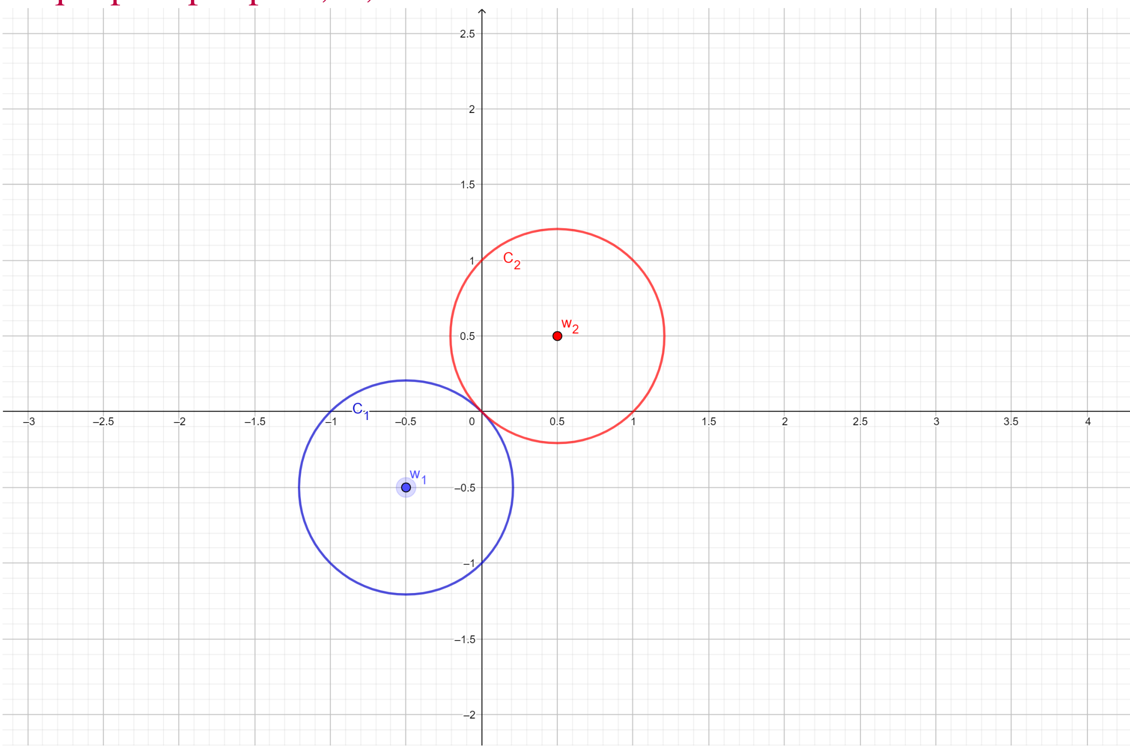
Por lo tanto,

$$a + c = a + bi \Longrightarrow c = bi$$

Concluímos que

$$\boxed{H(z)} = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(z+1)}{ai(z-1)} = \frac{(z+1)}{i(z-1)} \boxed{= -i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)}$$

Atención: $H$ manda la circunferencia que pasa por el los puntos $0, -i, -1$ en la circunferencia que pasa por por $i, 1, 0$



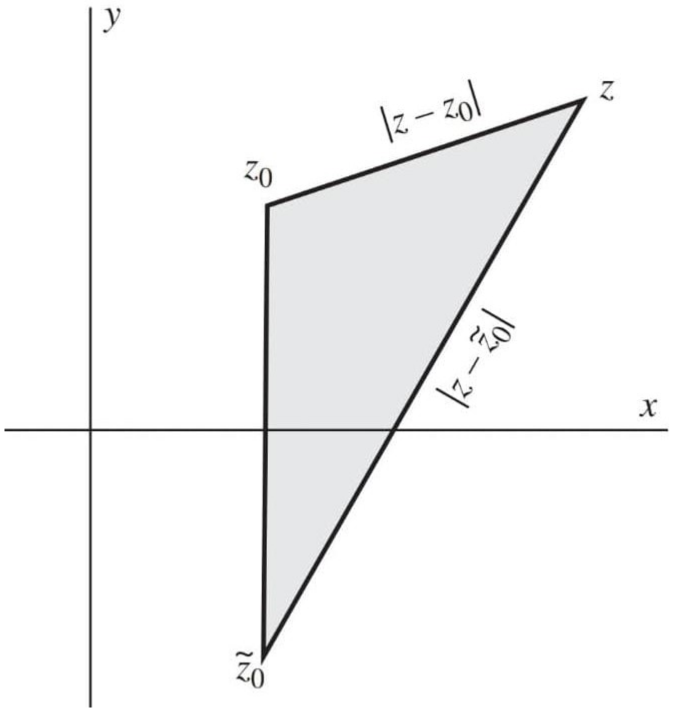

$C_1 \mapsto C_2$

Ejemplo 2) Dado $\omega$ en el semiplano superior y $\theta \in \mathbb{R}$ cualquiera, probar que la homografía

$$H(z) = e^{i\theta}\left(\frac{z-\omega}{z-\overline{\omega}}\right)$$

lleva el semiplano superior al disco unidad. ¿Cuál es la imagen del eje $\mathbb{R}$?

Solución: Probemos que $|H(z)| < 1 \ \forall z \in$ semiplano superior.
Sea entonces $z$ en el semiplano superior:
$|H(z)| = |e^{i\theta}|\left|\frac{z-\omega}{z-\overline{\omega}}\right| = \frac{|z-\omega|}{|z-\overline{\omega}|} < 1$ si y sólo si la distancia de $z$ a $\omega$ es menor que la distancia de $z$ a $\overline{\omega}$




y vale

- la igualdad si y sólo si $z = x \in \mathbb{R}$
- una desigualdad estricta en otro caso

Analíticamente, escribamos $\omega = a + bi, \ z = x + yi \ : \ b, y > 0$ pues ambos pertenecen al semiplano superior, entonces

$$|H(z)| = \frac{|z-\omega|}{|z-\overline{\omega}|} = \frac{|x+yi-a-bi|}{|x+yi-a+bi|} = \frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}} < 1$$

$$\iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}$$

$$\iff \cancel{(x-a)^2} + (y-b)^2 < \cancel{(x-a)^2} + (y+b)^2$$

$$\iff |y-b| < |y+b|$$

lo cual vale pues $y, b$ tienen el mismo signo, es decir, $y, b > 0$ ✓

¿Cuál es la imagen del eje $\mathbb{R}$?

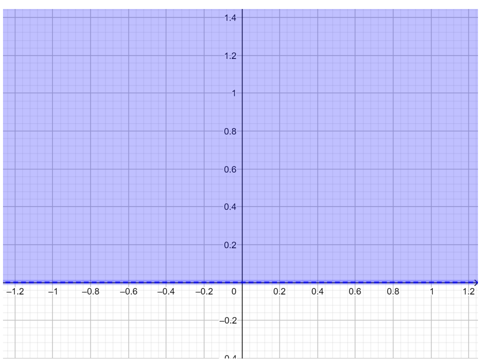
Por ser la frontera del semiplano superior, por continuidad debe ser llevada por $H$ a la circunferencia unidad, pero ésto se puede probar directamente:
Si $z = x \in \mathbb{R}$ entonces

$$|H(x)| = \frac{|x-\omega|}{|x-\overline{\omega}|} = \frac{|x-a-bi|}{|x-a+bi|} = \frac{\sqrt{(x-a)^2+(-b)^2}}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}} = 1 \checkmark$$

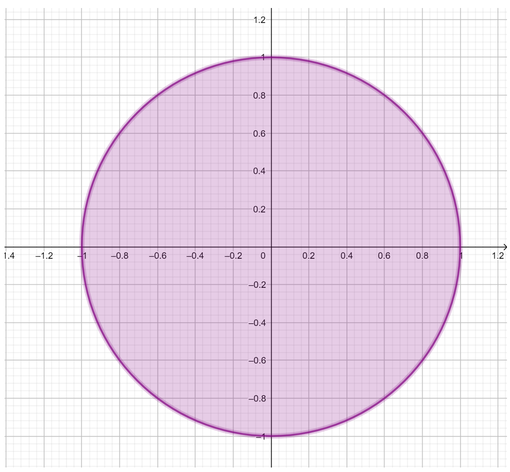
Por lo tanto, $H$ lleva

$$\text{El eje } \mathbb{R} \mapsto \text{ circunferencia unidad}$$

Semiplano Superior $\mapsto$ Disco



$\mapsto$



Propiedades de continuidad: 1. Las homografías son funciones continuas: $U \to \mathbb{C}$, con $U \subset \mathbb{C}$ abierto, lo cual equivale a ser continua: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

2. Las homografías son funciones biyectivas: $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ con inversa continua.

$$\Longrightarrow \boxed{f \text{ lleva: abierto} \mapsto \text{abierto en } \hat{\mathbb{C}}}$$

$$\boxed{f \text{ lleva: cerrado} \mapsto \text{cerrado en } \hat{\mathbb{C}}}$$

$$\boxed{f \text{ lleva: interior} \mapsto \text{interior en } \hat{\mathbb{C}}}$$

Ejemplo 3. a) Hallar la homografía $H$ que aplica los puntos

$$\{0,\ 1, 2i\} \mapsto \left\{-\frac{1}{2},\ \frac{3+i}{1-2i},\ \infty\right\} \text{ en ese orden}$$

Hallar los puntos del dominio que $H$ lleva a la recta que pasa por $-\frac{1}{2}$, $\frac{3+i}{1-2i}$.

Solución: Busquemos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tal que $H_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, con $ad - bc \neq 0$

$$H(0) = -\frac{1}{2}, \quad H(1) = \frac{3+i}{1-2i}, \quad H(2i) = \infty, \quad \text{luego}$$

$$\boxed{H(0) = \frac{b}{d} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow d = -2b, \quad H(1) = \frac{a+b}{c+d} = \frac{3+i}{1-2i},}$$

$$\boxed{H(2i) = \frac{a(2i)+b}{c(2i)+d} = \infty \Longrightarrow 2ci + d = 0 \Longrightarrow d = -2ci \Longrightarrow b = ci}$$

entonces

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{3+i}{1-2i}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow (a+b)(1-2i) &= (3+i)(c+d) \\
&= (3+i)c(1-2i) \\
\Longrightarrow (a+b)\cancel{(1-2i)} &= (3+i)(c+d) \\
&= (3+i)c\cancel{(1-2i)}(1-2i) \\
\Longrightarrow (a+b) &= (3+i)c \\
= a + ci & \\
\Longrightarrow \boxed{a = 3c} &
\end{aligned}$$

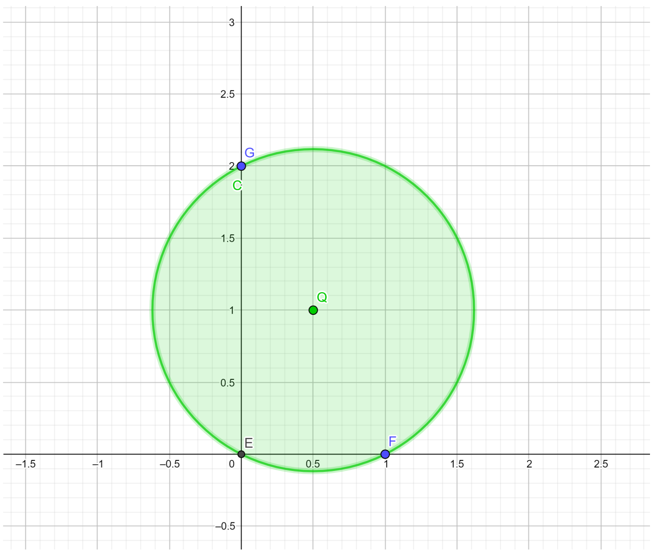
Por lo tanto,

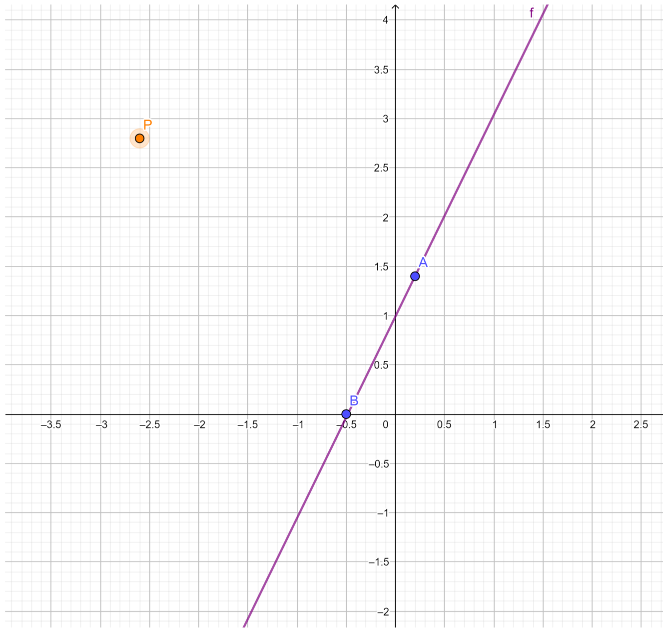
$$\boxed{H(z) = \frac{az+b}{cz+d} = c\frac{3z+i}{z-2i} : c \in \mathbb{C}}$$

Notar que en este caso, $H$ lleva la circunferencia que pasa por los 3 puntos en la recta que pasa por los 2 puntos dados de la imagen.

Además, por continuidad, $H$ lleva componentes conexas en componentes conexas, luego, lleva el interior del disco al semiplano izquierdo pues

$$H(Q) = H\left(\frac{1}{2} + i\right) = \frac{3(\frac{1}{2} + i) + i}{\frac{1}{2} + i - 2i} = \frac{\frac{3}{2} + 4i}{\frac{1}{2} - i} = \frac{3 + 8i}{1 - 2i} = \frac{1}{5}(-13 + 14i) = P$$




Ejemplo 3. b) Hallar la única $H$ que aplica los puntos $\frac{i}{8}$, $1$, $\infty$ en $0$, $\frac{8i+1}{6}$, $4i$, respec.

Solución: Busquemos $H_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dada por alguna matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ : $ad - bc \neq 0$, entonces

$$H\left(\frac{i}{8}\right) = 0, \quad H(1) = \frac{8i+1}{6}, \quad H(\infty) = 4i, \quad \text{luego}$$

$$\boxed{\left(\tfrac{8i+1}{6}\right) = H(1) = \frac{a+b}{c+d} \Longrightarrow \tfrac{8i+1}{6}(c+d) = a+b}$$

$$\boxed{0 = H\left(\tfrac{i}{8}\right) = \frac{a\left(\frac{i}{8}\right) + b}{c\left(\frac{i}{8}\right) + d} \Longrightarrow b = -\tfrac{i}{8}a}$$

$$4i = H(\infty) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{\frac{1}{|z|}\to 0} \frac{z\left(a+\frac{b}{z}\right)}{z\left(c+\frac{d}{z}\right)} = \lim_{\frac{1}{|z|}\to 0} \frac{\left(a+\frac{b}{z}\right)}{\left(c+\frac{d}{z}\right)} = \frac{a}{c} \implies \boxed{a = 4ci}$$

$$\boxed{\frac{8i+1}{6} = H(1) = \frac{a+b}{c+d} = \frac{c\left(\frac{1}{2}+4i\right)}{c\left(1+\frac{d}{c}\right)} = \frac{1}{2}\frac{(1+8i)}{\left(1+\frac{d}{c}\right)}}$$

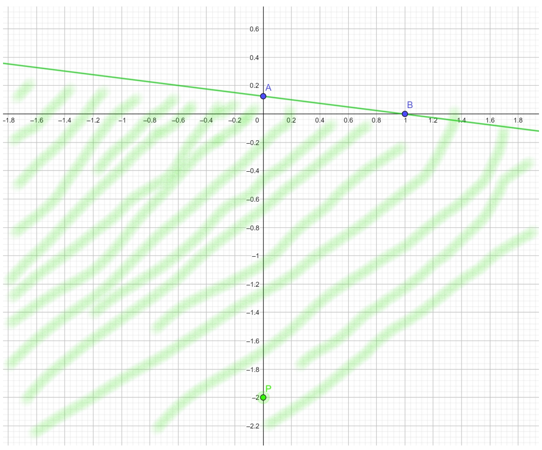
$$\boxed{\implies \cancel{(1+8i)} = 3\frac{\cancel{(1+8i)}}{\left(1+\frac{d}{c}\right)} \implies d = 2c}$$

$$\implies \boxed{H(z) = \frac{c}{c}\frac{8iz+1}{2z+4} = \frac{8iz+1}{2z+4}}$$

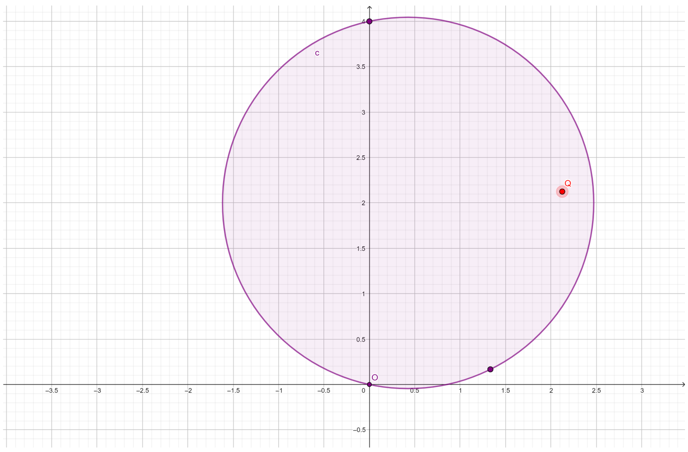
Notar que en este caso, $H$ lleva la recta que pasa por los puntos $\frac{i}{8}, 1$ en la circunferencia que pasa por los 3 puntos de la imagen.

Además, por continuidad, $H$ lleva componentes conexas en componentes conexas, luego, lleva semiplano inferior a la recta al interior del disco, pues

$$H(P) = H(-2i) = \frac{8i(-2i)+1}{2(-2i)+4} = \frac{17}{-4i+4} = \frac{17}{8}(1+i) = Q$$



$\mapsto$



## Práctica 1: Ejercicio 5

a) Probar la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática

$$\boxed{az^2 + bz + c = 0 : a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0}$$

Solución: En la teoría se vio que las soluciones son

$$\boxed{z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

donde entendemos que $w_{1,2} = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbb{C}$ son los dos números $\in \mathbb{C}$ :

$$(w_{1,2})^2 = b^2 - 4ac$$

b) Resolver $z^2 - (4 + 2i)z - (5 - 10i) = 0$
Solución:

$$\boxed{z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = \frac{+4 + 2i \pm \sqrt{(4 + 2i)^2 + 4(5 - 10i)}}{2}$$

$$= \frac{4 + 2i \pm \sqrt{12 + 16i + 20 - 40i)}}{2} = \frac{4 + 2i \pm \sqrt{32 - 24i}}{2}$$

$$= \frac{4 + 2i \pm (6 - 2i)}{2} = 2 + i \pm (3 - i)$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_1 = 5,\ z_2 = -1 + 2i} \checkmark$$

## Práctica 1: Ejercicio 6

a) Probar que para todo $c \in \mathbb{R} : c > 0$ el sgte conjunto es una circunferencia o una recta:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = c|z + 1|\}$$

Solución: Resolver para $z = x + yi$ y elevar al cuadrado la ecuación dada:

$$(x-1)^2 + y^2 = c^2(x+1)^2 + c^2y^2 \iff x^2 - 2x + 1 + y^2 = c^2x^2 + 2c^2x + c^2(1 + y^2)$$

$$\iff 0 = (c^2 - 1)x^2 + 2(c^2 + 1)x + (c^2 - 1) + (c^2 - 1)y^2$$

Caso $c \neq 1$, sea $a = \dfrac{c^2 + 1}{c^2 - 1}$:

$$\iff 0 = x^2 + 2ax + 1 + y^2 \iff 0 = (x+a)^2 - a^2 + 1 + y^2 \iff \boxed{\underbrace{a^2 - 1}_{>0} = (x + a)^2 + y^2}$$

Observamos que $|a| > 1 \implies a^2 - 1 = R^2 > 0$, luego da una circunferencia.

Caso $c = 1$: $\implies 0 = 4x \implies$ la solución es la recta vertical $x = 0$ ✓

## Práctica 1: Ejercicio 6. b

Representar gráficamente

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = 2|z + 3|\right\} \; y \quad \left\{z \in \mathbb{C} : |z - 3| < 2|z + 3|\right\}$$

Solución: Resolver para $z = x + yi$ y elevar al cuadrado la ecuación dada:

$$(x - 3)^2 + y^2 = 4\left[(x + 3)^2 + y^2\right] \iff x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4\left[x^2 + 6x + 9 + y^2\right]$$

$$\iff 0 = 3x^2 + 30x + 27 + 3y^2 = 3\left[x^2 + 10x + 9 + y^2\right] \iff 0 = 3\left[(x+5)^2 - 16 + y^2\right]$$

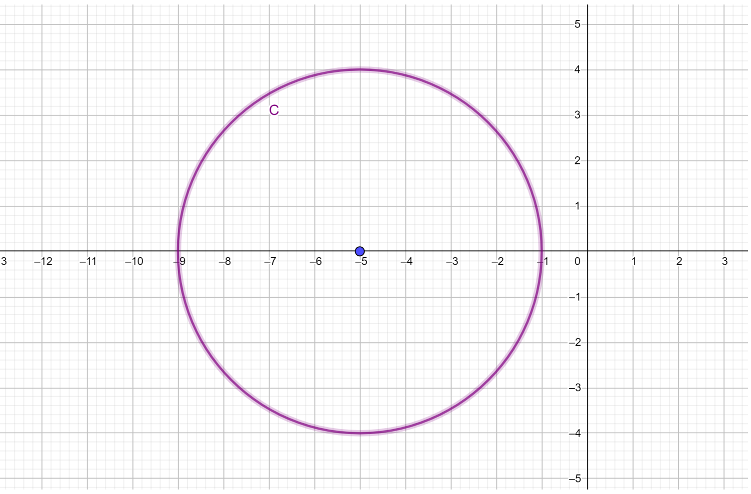
$$\boxed{\underbrace{16}_{=R^2} = (x + 5)^2 + y^2}$$

que es la ecuación de una circunferencia ✓

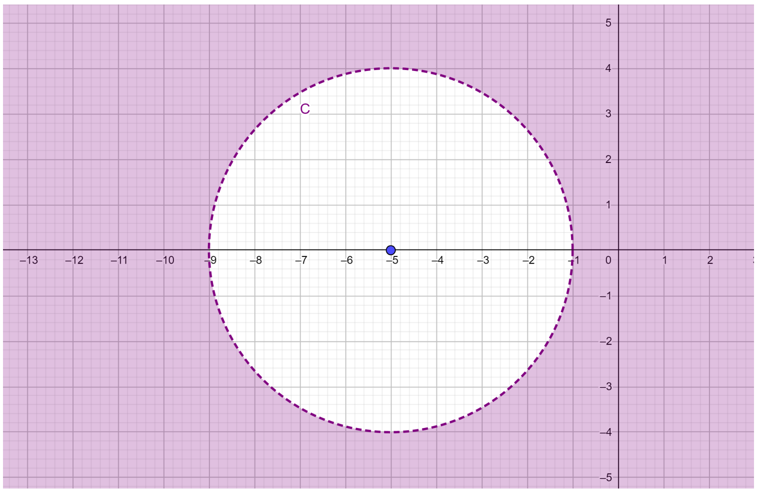
Análogamente,

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z-3| < 2|z+3|\right\}$$

es el exterior abierto (el complemento) de la clausura del disco anterior




$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z-3| = 2|z+3|\right\}$$




$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z-3| < 2|z+3|\right\}$$

En efecto, recorriendo los mismos pasos de antes nos quedaría:

$$\boxed{\underbrace{16}_{=R^2} < (x+5)^2 + y^2}$$

que es el abierto dado por el exterior del disco cerrado ✓

Práctica 1: Ejercicio 7

Sean $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$, probar que

$$az\bar{z} + cz + \overline{cz} + b = 0$$

representa una circunferencia, una recta, un punto o el conjunto vacío y toda circunferencia y toda recta puede describirse de esta forma.

Solución: Ejemplos y algunos casos particulares:

- Si $c = 0$, $a, b > 0$ ó bien $a, b < 0$:

$$0 = az\bar{z} + b \iff 0 = a|z|^2 + b \iff |z|^2 = -\frac{b}{a} < 0$$

es el conjunto vacío

- Si $c = 0$, $a > 0 > b$ ó bien $a < 0 < b$:

$$0 = az\bar{z} + b \iff 0 = a|z|^2 + b \iff |z|^2 = -\frac{b}{a} > 0$$

es la ecuación de una circunferencia

- Si $a = b = c = 1$ entonces $|z|^2 + z + \bar{z} + 1 = 0$ representa un punto, $z = -1$
En efecto,

$$|z|^2 + z + \bar{z} + 1 = 0 \iff x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 + y^2 = 0$$

$$\implies \text{única solución } z = -1$$

- Si $a = c = 1$ pero $b = -1$ entonces $|z|^2 + z + \bar{z} - 1 = 0$ representa la circunferencia $(x+1)^2 + y^2 = 2$. En efecto,

$$|z|^2 + z + \bar{z} - 1 = 0 \iff x^2 + y^2 + 2x = 1 \iff (x+1)^2 + y^2 = 2$$

representa la circunferencia con centro en $z = -1$ y radio $\sqrt{2}$

Solución en general, reescribiendo $z = x + yi$ y completando cuadrados. Escribamos también $c = \mathbf{c} + iIm(c)$, caso $a \neq 0$, obtenemos:

$$az\bar{z} + cz + \overline{cz} + b = 0 \iff a(x^2 + y^2) + 2\mathbf{c}x + b = 0 : a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\iff a\left[x^2 + y^2 + 2\frac{\mathbf{c}}{a}x\right] = -b$$

$$\iff a\left[\left(x + \frac{\mathbf{c}}{a}\right)^2 + y^2\right] = -b + \frac{\mathbf{c}^2}{a} \iff \boxed{\left(x + \frac{\mathbf{c}}{a}\right)^2 + y^2 = -\frac{b}{a} + \frac{\mathbf{c}^2}{a^2}}$$

- representa la circunferencia de centro en $z_0 = -\frac{\mathbf{c}}{a}$ y radio $R = -\frac{b}{a} + \frac{\mathbf{c}^2}{a^2} > 0$ $\iff$ este número $> 0$

- es el conjunto vacío $\iff -\frac{b}{a} + \frac{\mathbf{c}^2}{a^2} < 0$

- representa el único punto $z_0 = -\frac{\mathbf{c}}{a} \iff -\frac{b}{a} + \frac{\mathbf{c}^2}{a^2} = 0$

- Caso $a = 0$, obtenemos la ecuación lineal, no cuadrática, de la recta

$$\boxed{2\mathbf{c}x + b = 0 : \mathbf{c} \in \mathbb{R}}$$

## Práctica 1: Ejercicio 9

Determinar la imagen de las siguientes regiones bajo la homografía indicada:

11. a) El 1er cuadrante $\{z : Im(z) > 0 \text{ y } Re(z) > 0\}$ por $H(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$

Solución: Estudiemos la imagen de cada uno de los dos ejes coordenados, que forman la frontera del dominio: Puntos del eje $x$:

$$\boxed{H(1) = \frac{1-i}{1+i} = -i = A, \quad H(-1) = \frac{-1-i}{1-i} = i = B, \quad H(0) = \frac{-i}{i} = -1 = C}$$

$\Longrightarrow$ el eje real $\mapsto$ circunferencia por $A, B, C$

Puntos del eje $y$:

$$\boxed{H(i) = \frac{i-i}{i+i} = 0 = D, \quad -i \notin Dom(H)}$$

$$\boxed{\Longrightarrow definimos\ H(-i) = \infty = E, \quad H(0) = \frac{-i}{i} = -1 = C}$$

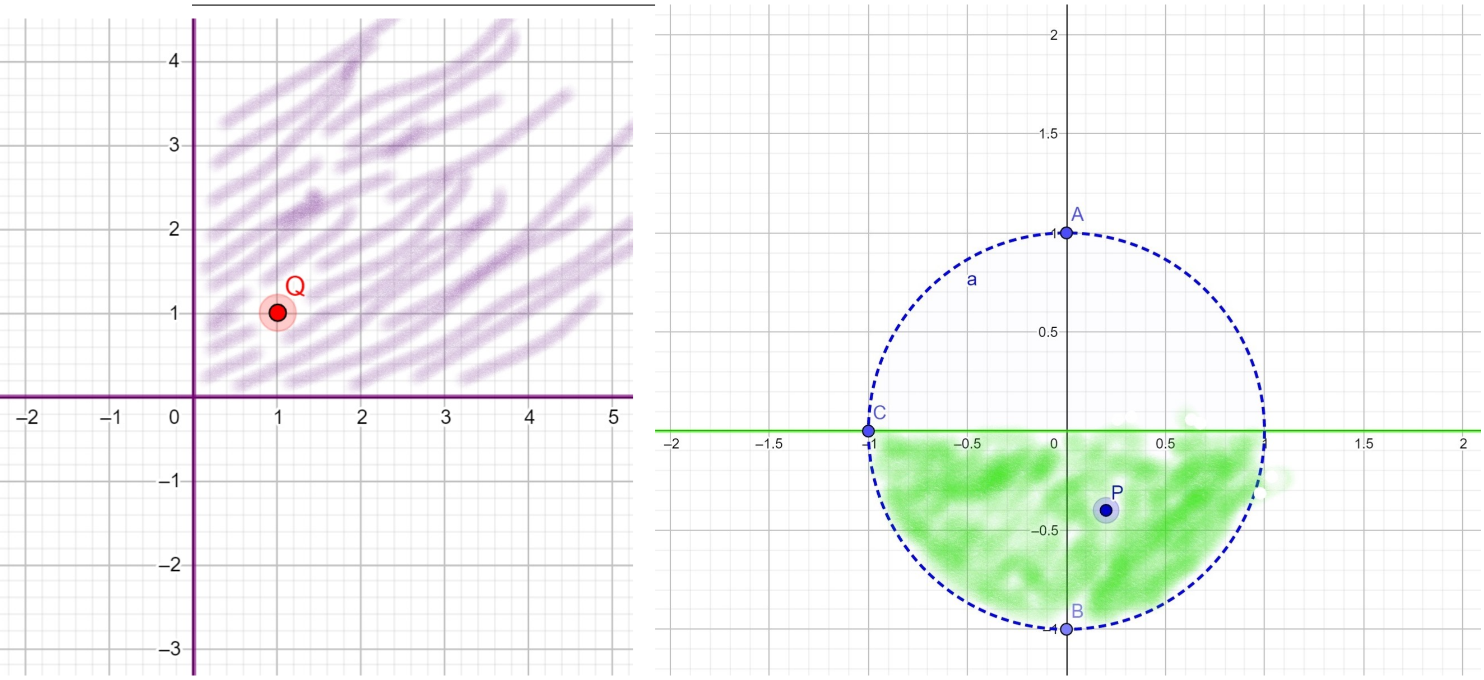
$\Longrightarrow$ el eje imaginario $\mapsto$ eje real

Notar: Cada una de las 2 regiones del $\mathbb{C}$ del dominio y de la imagen, sin las dos curvas tiene

$$\boxed{\text{4 componentes conexas = 4 abiertos disjuntos}}$$

Además, un punto interior al 1er cuadrante, que es la componente conexa que queremos mapear por $H$ va a parar a

$$H(Q) = H(1+i) = \frac{1}{1+2i} = \frac{1}{5}(1-2i) = P$$




$\overset{H}{\mapsto}$

Conclusión: La imagen del 1er cuadrante $\{z : Im(z) > 0 \text{ y } Re(z) > 0\}$ por $H(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ es el medio disco unitario del semiplano inferior ✓

9. b) Determinar la imagen de las siguientes regiones bajo la homografía indicada:

El disco $\{z : |z| < 1\}$ por $H(z) = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$

Éste es un item adicional: primero el disco completo y luego el medio disco

Solución: Veamos cuál es la imagen por $H$ de 3 puntos de la circunferencia unidad:

$$\boxed{H(1) = \frac{2-i}{2+i} = \frac{1}{5}(3-4i) = A, \quad H(-1) = \frac{-2-i}{2-i} = -\frac{1}{5}(3+4i) = B,}$$

$$\boxed{H(i) = \frac{2i - i}{2 + i^2} = i = C}$$

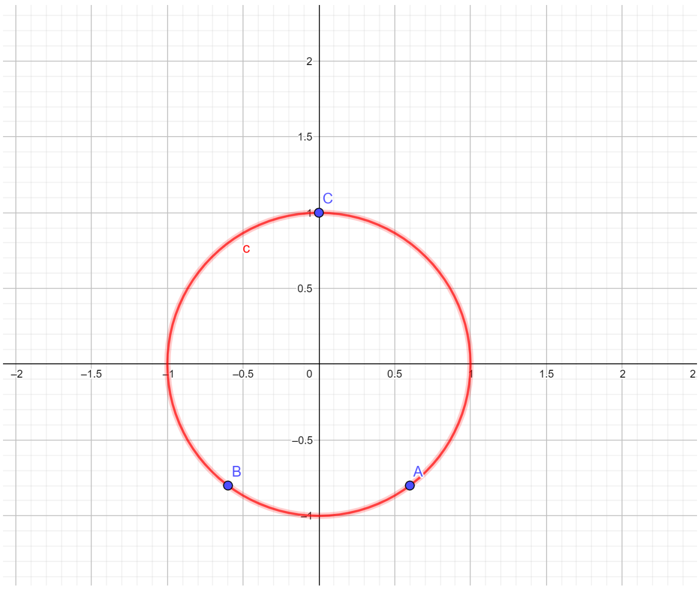
$$\Longrightarrow A, B, C \text{no están alineados}$$

$$\Longrightarrow \text{la circunferencia } \{z : |z| = 1\} \mapsto \text{ la circunferencia que pasa por A, B, C}$$

Como además,

$$|A| = 1 = |B| = |C|$$

$$\Longrightarrow \text{la circunferencia unidad} \mapsto \text{ la circunferencia unidad} \checkmark$$




Más aún, $H$ es continua en el todo el disco (interior y borde), pues el denominador se anula en $z = 2i \notin$ disco unidad, luego, $H$ manda el disco cerrado= compacto a un compacto, que en este caso es el mismo.

Si se quiere, veamos que un punto interior, el $z_0 = 0$, va a parar a $\omega_0$ que pertenece al interior del disco unidad:

$$z_0 = 0 \mapsto H(0) = \frac{-i}{2} := \omega_0$$

luego, como antes, concluímos que el interior del disco unidad es llevado por $H$ al interior del disco unidad.

Más difícil es hacer la cuenta directamente pero es posible: si $|z| \leq 1$

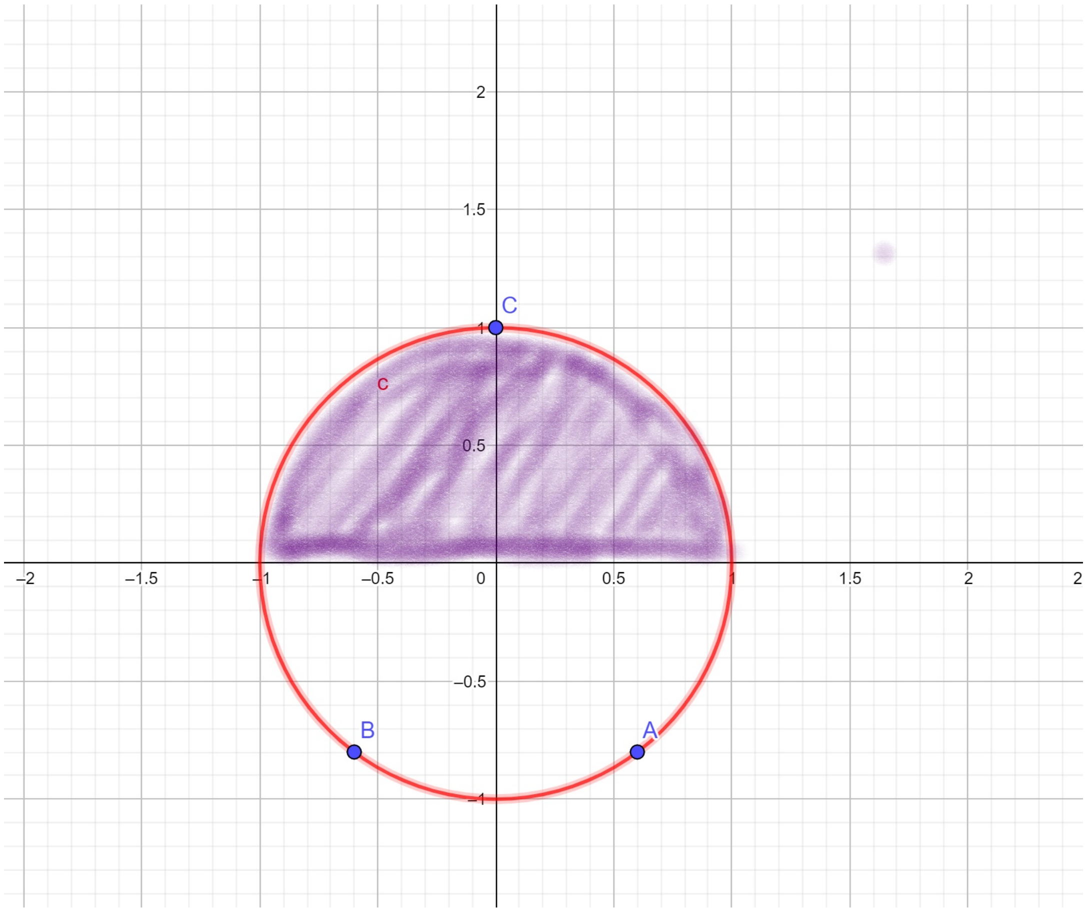
$$\Rightarrow |H(z)| = \left|\frac{2z - i}{2 + iz}\right| \leq 1 \Longleftrightarrow |2z - i|^2 \leq |2 + iz|^2$$

$$\Longleftrightarrow 4x^2 + (2y - 1)^2 \leq (2 - y)^2 + x^2 \Longleftrightarrow 3x^2 + 4y^2 - 4y + 1 \leq 4 - 4y + y^2$$

$$\Longleftrightarrow 3x^2 + 3y^2 \leq 3 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \checkmark$$

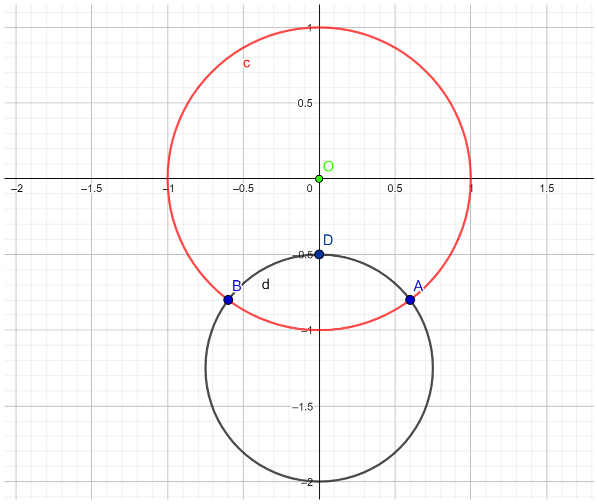
9. c) Determinar la imagen del medio disco del semiplano superior $\{z : Im(z) > 0 \text{ y } |z| < 1\}$ por $H(z) = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$

Solución: Sabemos que la imagen por $H$ del disco unidad va a parar al disco unidad, con borde y todo, y queremos ver cuál es la imagen del medio disco del semiplano superior:




Estudiemos la imagen de la recta = eje real, para lo cual veamos adónde van a parar 3 puntos:

$$\boxed{H(1) = \frac{2-i}{2+i} = \frac{1}{5}(3-4i) = A, \quad H(-1) = \frac{-2-i}{2-i} = -\frac{1}{5}(3+4i) = B, \quad H(0) = \frac{-i}{2} = D}$$

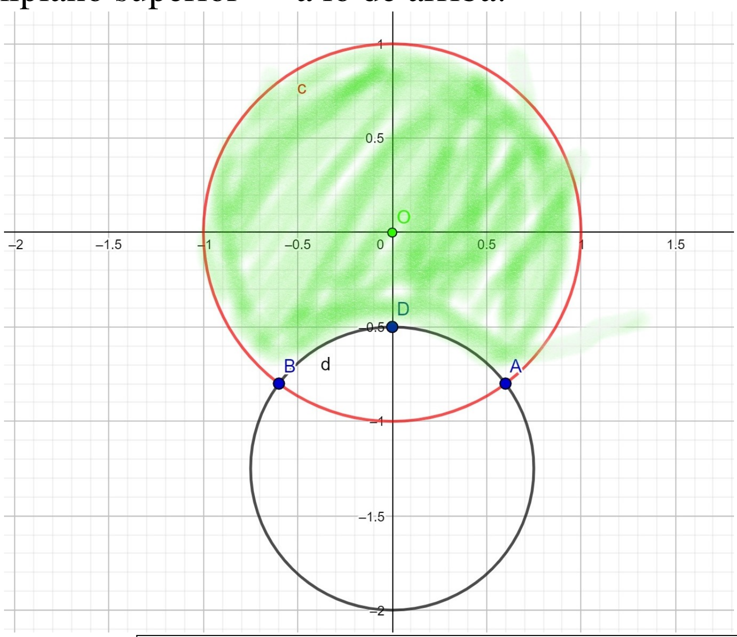



$\Longrightarrow$ el eje real $\mapsto$ circunferencia por $A, B, D$

Además, un punto del semiplano superior va a parar a $H\left(\frac{i}{2}\right) = \dfrac{2\left(\frac{i}{2}\right) - i}{2 + i\left(\frac{i}{2}\right)} = 0$

El interior del disco en el dominio sin el eje real tiene dos componentes conexas, y toda biyección continua lleva cada componente conexa del dominio en una componente conexa de la imagen

$\Longrightarrow$ semiplano superior $\mapsto$ a lo de arriba:




Concluímos: $\boxed{\left\{z : Im(z) > 0 \text{ y } |z| < 1\right\} \mapsto \text{ área sombreada en verde } \checkmark}$