

Matemática 4

Práctica 1: Números Complejos

Patricia Jancsa

Ej. 1.

Calcular la suma, el producto y sus partes reales e imaginarias. Calcular también el inverso de z y de w . Verificar la validez de las propiedades para los siguientes casos:

$$z = 1 + i, w = \sqrt{3} - 3i$$

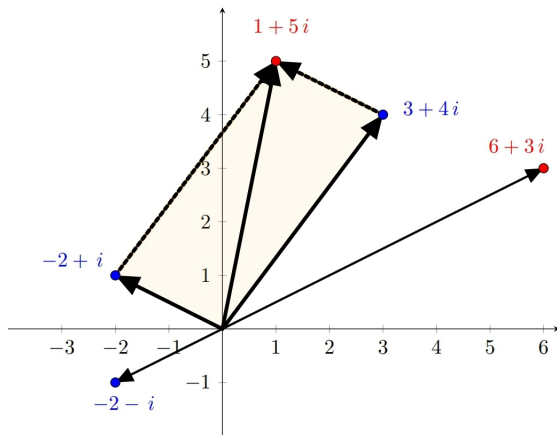
SUMA: $z + w = (1 + i) + (\sqrt{3} - 3i) = 1 + \sqrt{3} + (1 - 3)i = 1 + \sqrt{3} - 2i$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z + w) = 1 + \sqrt{3}, \operatorname{Im}(z + w) = -2$$

PRODUCTO: $z \cdot w = (1 + i) \cdot (\sqrt{3} - 3i) = \sqrt{3} + 3 + (\sqrt{3} - 3)i$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z \cdot w) = \sqrt{3} + 3, \operatorname{Im}(z \cdot w) = \sqrt{3} - 3$$

Suma en $\mathbb{C}$ es la suma en $\mathbb{R}^2$



$$3 + 4i = -2 + i = 1 + 5i$$

$$\text{Producto por escalar real: } -3 \cdot (-2 - i) = 6 + 3i$$

$$\text{INVERSO de } z \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{(1+i)}}{2} = \frac{1-i}{2}$$

pues comprobemos

$$z \cdot z^{-1} = (1+i) \frac{1-i}{2} = \frac{(1+i)(1-i)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{INVERSO de } w \Rightarrow w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{\overline{(\sqrt{3}-3i)}}{12} = \frac{\sqrt{3}+3i}{12}$$

pues comprobemos

$$w \cdot w^{-1} = (\sqrt{3}-3i) \frac{\sqrt{3}+3i}{12} = \frac{(\sqrt{3}-3i)(\sqrt{3}+3i)}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

Propiedades :

$$\text{a) } \overline{\overline{z}} = \overline{(1+i)} = \overline{1-i} = 1+i = z$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \overline{z+w} &= \overline{(1+i) + (\sqrt{3}-3i)} = \overline{1+\sqrt{3}+(1-3i)i} \\ &= \overline{1+\sqrt{3}-2i} = 1+\sqrt{3}+2i\end{aligned}$$

Por otra parte, $\overline{z} + \overline{w}$

$$= \overline{(1+i)} + \overline{(\sqrt{3}-3i)} = (1-i) + (\sqrt{3}+3i) = 1+\sqrt{3}+2i$$

$$\begin{aligned}\text{c) } \overline{z \cdot w} &= \overline{(1+i) \cdot (\sqrt{3}-3i)} = \overline{\sqrt{3}+3+(\sqrt{3}-3)i} \\ &= \overline{\sqrt{3}+3-(\sqrt{3}-3)i}\end{aligned}$$

$$\text{Por otra parte, } \overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{(1+i)} \cdot \overline{(\sqrt{3}-3i)} = (1-i) \cdot (\sqrt{3}+3i) = \overline{z \cdot w}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } |z \cdot w| &= |(1 + i) \cdot (\sqrt{3} - 3i)| = |\sqrt{3} + 3 + (\sqrt{3} - 3)i| \\
 &= \sqrt{(\sqrt{3} + 3)^2 + (\sqrt{3} - 3)^2} = \sqrt{12 + 2\sqrt{3} + 12 - 2\sqrt{3}} \\
 &= 2\sqrt{6} = |z| \cdot |w|
 \end{aligned}$$

$$\text{e) } z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} :$$

$$\text{Si } z = 1 + i \implies \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{(1 + i)}}{2} = \frac{1 - i}{2} = z^{-1}$$

pues comprobemos

$$z \cdot z^{-1} = (1 + i) \left(\frac{1 - i}{2} \right) = \frac{(1 + i)(1 - i)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

f) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$:

$$z^{-1} = (1 + i)^{-1} = \frac{\overline{(1 + i)}}{2} = \frac{1 - i}{2}$$

Entonces

$$\overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{1 - i}{2}\right)} = \frac{1 + i}{2} = (1 - i)^{-1} = (\overline{z})^{-1}$$

Forma Trigonométrica

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, si $z \neq 0 \implies r = |z| \neq 0$ y se tiene en forma trigonométrica

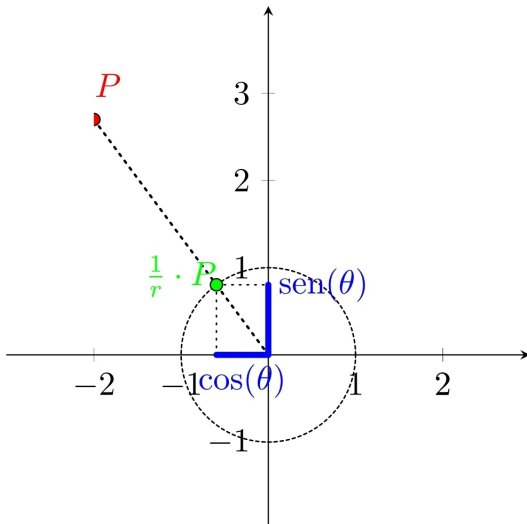
$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

donde valen las relaciones

$$z = a + bi \implies \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \cos \theta \\ \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

$\implies \theta + 2k\pi$ son todos los argumentos de z

Forma Trigonométrica



Módulo y Argumento

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ entonces

$$1) \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

la cual implica la validez de

$$2) \quad |z^n| = |z|^n$$

$$3) \quad \arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

la cual implica la validez de

$$4) \quad \arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

Valores de Senos y Cosenos Notables del 1er Cuadrante

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Ej. 2.

Calcular el módulo y el argumento de cada número complejo:

a) $z = 3 + \sqrt{3}i$

b) $w = 12 - 4\sqrt{3}i$

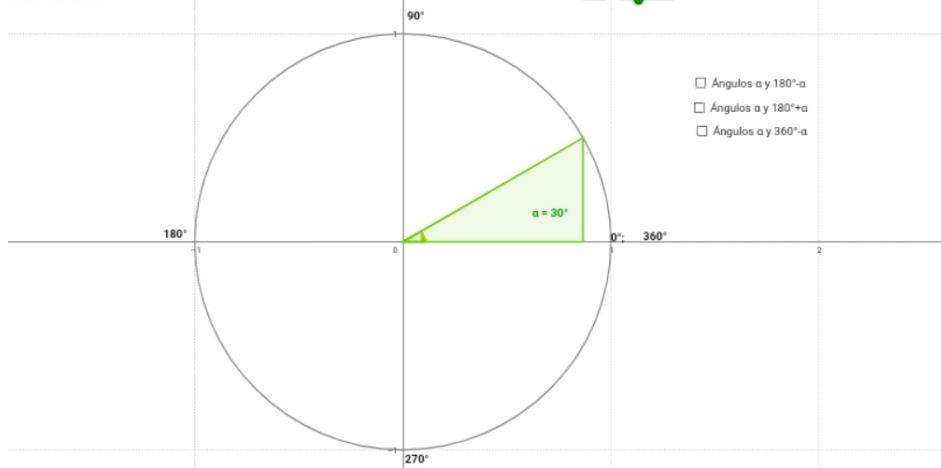
c) $z = -6 - 2\sqrt{3}i$

d) $\tau = -\sqrt{3} + 3i$

Solución: a) $|z| = |3 + \sqrt{3}i| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow z = 2\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i \right)}_{\text{complejo de modulo 1}} = 2\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)}_{\text{complejo de modulo 1}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \theta \\ \frac{1}{2} = \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ es el argumento principal de } z$$



Todos los argumentos son $\arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z$ se representa en el 1er cuadrante del plano $\mathbb{C}$
sobre la semirrecta que empieza en el origen,
a 30° medidos desde el semieje positivo x ,
en sentido antihorario, a distancia $2\sqrt{3}$

Todos los argumentos son $\arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

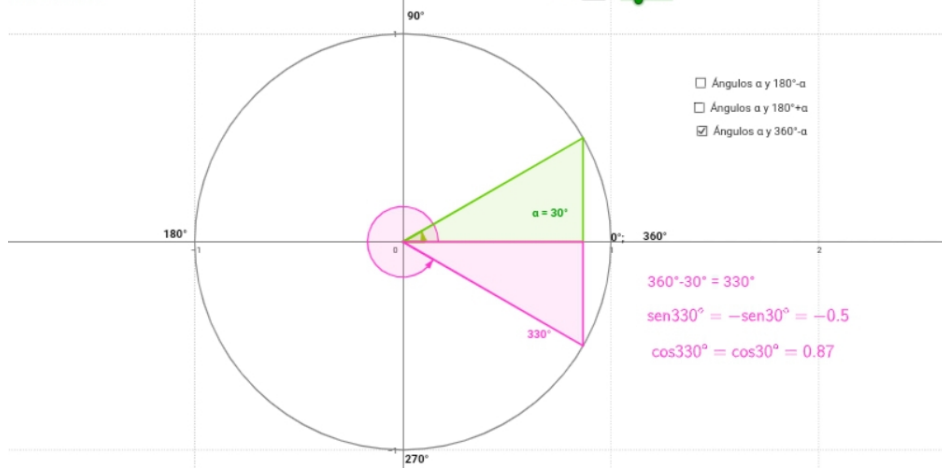
b) $w = 12 - 4\sqrt{3}i$.

$$\Rightarrow |w| = |12 - 4\sqrt{3}i| = \sqrt{(12)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{8^2 \cdot 3} = 8\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow w = 8\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{12}{8\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}i \right)}_{\text{complejo de modulo 1}} = 8\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)}_{\text{complejo de modulo 1}}$$

Esto es imprescindible para calcular el argumento θ , porque así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \theta \\ -\frac{1}{2} = \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ es el argumento principal de } w$$



Todos los argumentos son $\arg(z) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

Es decir que

w se representa en el 4to cuadrante del plano $\mathbb{C}$

sobre la semirrecta que empieza en el origen, a 30° medidos deso

en sentido negativo = horario

a distancia $8\sqrt{3}$

Todos los argumentos son $\arg(w) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

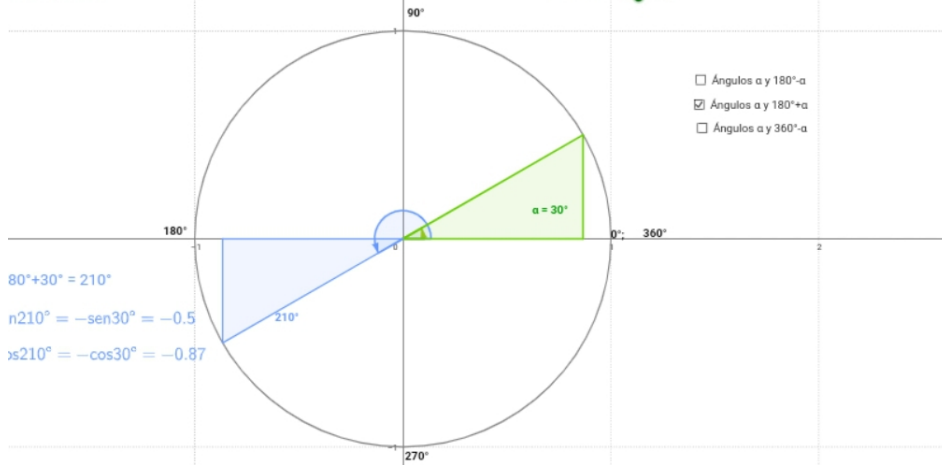
c) $z = -6 - 2\sqrt{3}i$.

$$\Rightarrow |z| = |-6 - 2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-6)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow z = 4\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(-\frac{6}{4\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}i \right)}_{\text{complejo de modulo 1}} = 4\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)}_{\text{complejo de modulo 1}}$$

así podemos calcular el argumento θ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \theta \\ -\frac{1}{2} = \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = -\frac{5}{6}\pi \text{ es el argumento principal}$$



Todos los argumentos son $\arg(z) = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ z se representa en el 3er cuadrante del plano $\mathbb{C}$
sobre la semirrecta que empieza en el origen, a 210°
medidos desde el semieje positivo x ,

en sentido positivo = antihorario

a distancia $4\sqrt{3}$ del origen sobre la semirrecta

Todos los argumentos de z son $\arg(z) = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

$$d) \mathcal{T} = -\sqrt{3} + 3i$$

$$\Rightarrow |\mathcal{T}| = |-\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{T} = 2\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{3}}i \right)}_{\text{complejo de modulo 1}} = 2\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)}_{\text{complejo de modulo 1}}$$

Calculemos su argumento θ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} = \cos \theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi \text{ es el argumento principal de } \mathcal{T}$$

Todos los argumentos de $\mathcal{T}$ son $\arg(\mathcal{T}) = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

Es decir que

$\mathcal{T}$ se representa en el 2do cuadrante del plano $\mathbb{C}$
sobre la semirrecta que empieza en el origen, a 120° medidos desde el eje real
en sentido antihorario
a distancia $2\sqrt{3}$ del origen sobre la misma semirrecta

Reducción de ángulos al 1º cuadrante

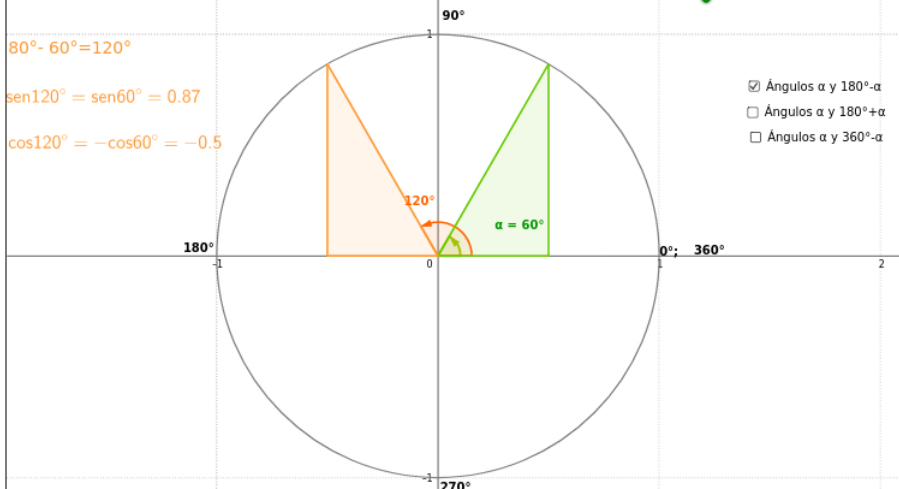
Introduce en la casilla un ángulo del primer cuadrante o utiliza el deslizador

$\alpha = 60$ $\alpha = 60^\circ$

$$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = 0.87$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0.5$$



- ☒ Ángulos α y $180^\circ - \alpha$
- ☐ Ángulos α y $180^\circ + \alpha$
- ☐ Ángulos α y $360^\circ - \alpha$

Raíces Cuadradas

Si $0 \neq z \in \mathbb{C}$ entonces existen distintos w y $-w \in \mathbb{C}$ tales que

$$w^2 = z = (-w)^2$$

Ejemplos: • $i^2 = -1 = (-i)^2$

$$\bullet (\sqrt{3}i)^2 = (-\sqrt{3}i)^2 = -3$$

$$\bullet \text{ Si } z = -5 \implies \pm w = \pm\sqrt{5}i \text{ cumple } (\pm w)^2 = (\pm\sqrt{5}i)^2 = -5$$

Raíces Cuadradas

Ej. 3.

Calcular las raíces cuadradas de $z = 7 + 6\sqrt{2}i$.

Solución: Buscamos $w, -w \in \mathbb{C}$ tales que

$$w^2 = 7 + 6\sqrt{2}i = (-w)^2$$

Escribamos en forma binómica

$$w = x + yi \implies w^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + (yi)^2$$

$$= \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{parte real}} + \underbrace{2xyi}_{\text{parte imaginaria}}$$

$$= 7 + 6\sqrt{2}i$$

Raíces Cuadradas

Obtenemos ecuaciones en las variables $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet x^2 - y^2 = \text{Re}(z) = 7 \\ \bullet 2xy = \text{Im}(z) = 6\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{x} \neq 0 \\ \bullet x^2 + y^2 = |w|^2 = |7 + 6\sqrt{2}i| = \sqrt{121} = 11 \end{cases}$$

Agregamos una ecuación más para simplificar los cálculos porque nos quedaron sólo ecuaciones cuadráticas. Usando la 1ra y la 3ra

$$\Rightarrow 11 - x^2 = y^2 = x^2 - 7$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 18x^2 \Rightarrow x^2 = 9$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \pm 3, y = \pm \sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{z = \pm(3 + \sqrt{2}i)}$$

Otro camino sin agregar la 3ra ecuación

$$\begin{aligned}x \neq 0 \implies 7 &= x^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{x} \right)^2 = \frac{x^4 - 18}{x^2} \\ \implies 0 &= x^4 - 18 - 7x^2\end{aligned}$$

Raíces de la ecuación de grado 4: Cambiemos $u = x^2 > 0$ en $\mathbb{R}$

$$\implies 0 = u^2 - 18 - 7u \text{ con raíces } u_1 = 9, u_2 = -2$$

$$\implies 0 < x^2 = u = 9 \text{ es la única solución} \implies \text{despejemos } x, y$$

Raíces de la ecuación de grado 4: **completemos cuadrados**

$$\Rightarrow 0 = x^4 - 18 - 7x^2 = \left(x^2 - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} - 18$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} + 18 = \frac{121}{4} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left|x^2 - \frac{7}{2}\right| = \frac{11}{2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{2} = \pm \frac{11}{2} \Rightarrow x^2 = 9 \text{ ó bien } x^2 = -2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 0 < x^2 = 9 \text{ es la única solución} \Rightarrow \text{despejemos } y = \frac{3\sqrt{2}}{x}$$

$$x = 3 \Rightarrow y = \sqrt{2}, \quad x = -3 \Rightarrow y = -\sqrt{2}$$

Por lo tanto, las dos raíces cuadradas son

$$w = 3 + \sqrt{2}i, \quad -w = -3 - \sqrt{2}i, \quad \checkmark$$

Comprobación:

$$\begin{aligned}(\pm w)^2 &= (3 + \sqrt{2}i)^2 \\&= 9 + 6\sqrt{2}i + 2i^2 \\&= 9 + 6\sqrt{2}i - 2 = 7 + 6\sqrt{2}i \quad \checkmark\end{aligned}$$

Ej 4. a)

Hallar todas las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $z^4 = -4$.

Solución: Sea $z \in \mathbb{C}$ una solución de la ecuación, entonces z verifica una ecuación para el módulo y otra para el argumento, es decir

$$|z^4| = |z|^4 = |-4| \implies |z| = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$$

Por otra parte, para el argumento, tenemos

$$\arg(z^4) = \arg(-4) = \pi + 2\ell\pi : \ell \in \mathbb{Z}$$

$$\implies \arg(z^4) = 4 \arg(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

entonces

$$\arg(z^4) = 4 \arg(z) + 2k\pi = \pi + 2\ell\pi$$

$$\arg(z^4) = 4 \arg(z) + 2k\pi = \pi + 2\ell\pi$$

Pasemos al lado derecho el $2k\pi$ y observemos que $\ell - k$ es un número entero, que llamamos r , y dividamos por 4, entonces

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{2r\pi}{4}$$

Debido a la periodicidad de los argumentos, sabemos que alcanza tomar 4 valores sucesivos de $r \in \mathbb{Z}$ para obtener las 4 raíces distintas, es decir, los cuatro argumentos que dan las 4 soluciones distintas $z_r : r = 0, 1, 2, 3$ son

$$\theta_r = \arg(z_r) = \frac{\pi}{4} + \frac{r}{2}\pi : r = 0, 1, 2, 3$$

$$\implies \theta_0 = \arg(z_0) = \frac{\pi}{4}; \quad \theta_1 = \arg(z_1) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta_2 = \arg(z_2) = \frac{5\pi}{4}; \quad \theta_3 = \arg(z_3) = \frac{7\pi}{4}$$

Por lo tanto, las soluciones son

$$z_r = \sqrt{2}(\cos \theta_r + i \operatorname{sen} \theta_r)$$

Evaluando para cada r los argumentos obtenidos y sabiendo que el módulo es $|z| = \sqrt{2}$, obtenemos

$$z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right),$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right);$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right);$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \right)$$

Conocemos los valores de seno y coseno de estos argumentos de la tabla:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

Los demas argumentos tienen sus valores trigonométricos con el mismo valor absoluto pero alternando los signos dependiendo del cuadrante. Por lo tanto,

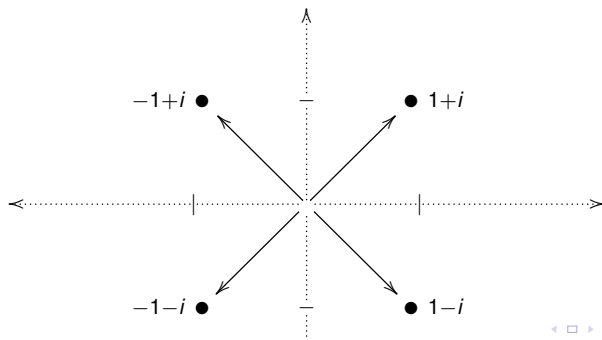
$$z_0 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$$

Así siguiendo

$$z_1 = -1 + i; \quad z_2 = -1 - i; \quad z_3 = 1 - i;$$

Observación: Notar que las raíces de una ecuación de la forma $z^n = \omega_0 \in \mathbb{C}$ siempre son los vértices de un polígono regular de n lados. En este caso, son los vértices de un cuadrado.

Notar también que los pares z_1 y z_2 son mutuamente conjugadas, lo mismo que z_0 y z_3 , lo cual ocurre dado que los coeficientes de la ecuación original $z^4 = -4$ pertenecen a $\mathbb{R}$.



Ej 4. b)

Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^3 = -8i$.

Solución: Sea $z \in \mathbb{C}$ una solución de la ecuación, entonces z verifica una ecuación para el módulo y otra para el argumento, es decir

$$|z^3| = |z|^3 = 8|-i| \implies |z| = 2$$

Por otra parte, para el argumento, tenemos

$$\arg(z^3) = \arg(-8i) = \arg(-i)$$

$$= \frac{3}{2}\pi + 2\ell\pi : \ell \in \mathbb{Z}$$

$$\implies \arg(z^3) = 3 \arg(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

entonces

$$\arg(z^3) = 3 \arg(z) + 2k\pi = \frac{3}{2}\pi + 2\ell\pi : k, \ell \in \mathbb{Z}$$

Pasemos al lado derecho el $2k\pi$ y observemos que $\ell - k$ es un número entero, que llamamos r , y dividamos por 3, entonces

$$\arg(z) = \frac{1}{2}\pi + \frac{2r}{3}\pi : r = 0, 1, 2$$

Debido a la periodicidad de los argumentos, sabemos que alcanza tomar 3 valores sucesivos de $r \in \mathbb{Z}$ para obtener las 3 raíces distintas, es decir, los argumentos que dan las 3 soluciones distintas $z_r : r = 0, 1, 2$ son

$$\theta_r = \arg(z_r) = \frac{1}{2}\pi + \frac{2r}{3}\pi : r = 0, 1, 2$$

Obtenemos

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\pi; \quad \theta_1 = \frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{7}{6}\pi; \quad \theta_2 = \frac{1}{2}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

Evaluando para cada r los argumentos obtenidos y sabiendo que el módulo es $|z| = 2$, obtenemos las soluciones:

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right),$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right);$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} \right);$$

Conocemos los valores de seno y coseno de la tabla:

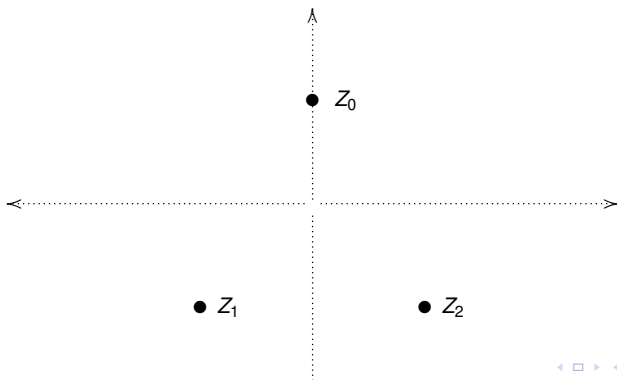
$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

El seno y coseno de $\theta_1 = \frac{7}{6}\pi$ y $\theta_2 = \frac{11}{6}\pi$ tienen el mismo valor absoluto pero los signos dependen del cuadrante:

$$\implies z_0 = 2i, \quad z_1 = -\sqrt{3} - i, \quad z_2 = \sqrt{3} - i$$

Observación: Notar que las raíces de la ecuación $z^3 = -8i \in \mathbb{C}$ son los vértices de un triángulo equilátero.

Notar también que z_1 y z_2 no son mutuamente conjugadas: no tienen por qué serlo, dado que los coeficientes de la ecuación original no pertenecen a $\mathbb{R}$.



Fórmula de Euler

FORMA EXPONENCIAL

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) : \theta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet |e^{i\theta}| = 1 \\ \bullet \operatorname{arg}(e^{i\theta}) = \theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Fórmula de Euler

En general, si $z \neq 0 \Rightarrow |z| = r > 0$ entonces

FORMA EXPONENCIAL

$$z = r e^{i\theta} = r \left(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet |r e^{i\theta}| = r \\ \bullet \operatorname{arg}(r e^{i\theta}) = \theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Módulo y Argumento

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ entonces

$$1) \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

la cual implica la validez de

$$2) \quad |z^n| = |z|^n$$

$$3) \quad \arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

la cual implica la validez de

$$4) \quad \arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

Comprobemos 1) y 3)

En efecto, si $z = r_1(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, $w = r_2(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, entonces

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r_1(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) r_2(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ &= r_1 r_2 \left[\cos \alpha \cos \theta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \right] + i \left[\cos \alpha \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \right] \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\alpha + \theta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \theta) \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ y también

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \checkmark$$

Valores de Senos y Cosenos Notables del 1er Cuadrante

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Ej 5. a)

Calcular $z \cdot w = e^{i\pi} e^{-2i\pi/3}$ en forma exponencial, trigonométrica y binómica.

Solución: La **forma exponencial** es la más fácil: se multiplican potencias de igual base

$$z \cdot w = e^{\pi i} e^{-\frac{2}{3}\pi i} = e^{-\frac{2}{3}\pi i + \pi i} = e^{(1 - \frac{2}{3})\pi i} = e^{\frac{1}{3}\pi i}$$

$\Rightarrow$ en **forma trigonométrica** tenemos

$$\Rightarrow z \cdot w = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$$

$\Rightarrow$ en **forma binómica** obtenemos

$$z \cdot w = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$\Rightarrow$

$$z \cdot w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

es el complejo de módulo 1 y argumento

$$\arg(z \cdot w) = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

es decir, se encuentra sobre la semirrecta a 60° en el primer cuadrante

Ej 5. b)

Calcular $z \cdot w = (\sqrt{3} + i) \cdot 3 \cdot e^{2i\pi/3}$ en forma exponencial, trigonométrica y binómica

Solución: Primero necesitamos escribir ambos factores de la misma forma para poder multiplicarlos mejor:

$$|z| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{3} + i = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \theta \\ \frac{1}{2} = \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{1}{6}\pi \text{ es el argumento principal}$$

Todos los argumentos de z son $\arg(z) = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow z &= \sqrt{3} + i = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \\ &= 2 \cdot e^{i\theta} = 2 \cdot e^{\frac{1}{6}\pi i}\end{aligned}$$

Calculemos ahora el producto en **forma exponencial**:

$$z \cdot w = 2 \cdot e^{\frac{1}{6}\pi i} \cdot 3 \cdot e^{\frac{2}{3}\pi i} = 6 \cdot e^{(\frac{1}{6} + \frac{2}{3})\pi i} = 6 \cdot e^{\frac{5}{6}\pi i}$$

Por lo tanto, el módulo y argumento de $z \cdot w$ se desprenden de la expresión anterior:

$$\Rightarrow |z \cdot w| = 6, \quad \arg(z \cdot w) = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ en **forma trigonométrica** tenemos

$$z \cdot w = 6 \cdot \left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) \right)$$

$\Rightarrow$ en **forma binómica** obtenemos

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 6 \cdot \left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) \right) = 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= -3\sqrt{3} + 3i \end{aligned}$$

Graficar regiones de $\mathbb{C}$

Graficar el conjunto en cada caso:

$$A = \{z : |\operatorname{Im}(z)| > 1\},$$

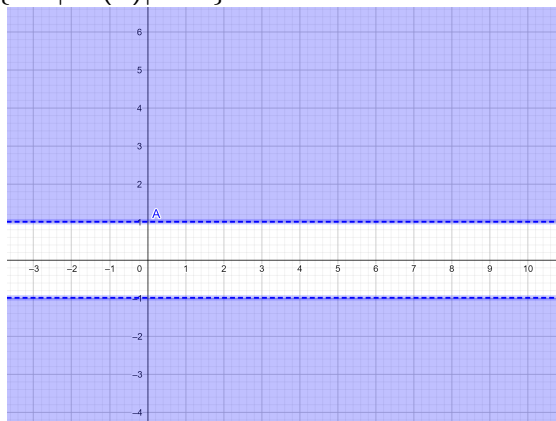
$$B = \{z : |z| > 2\}$$

$$C = \left\{z : \frac{\pi}{6} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\right\},$$

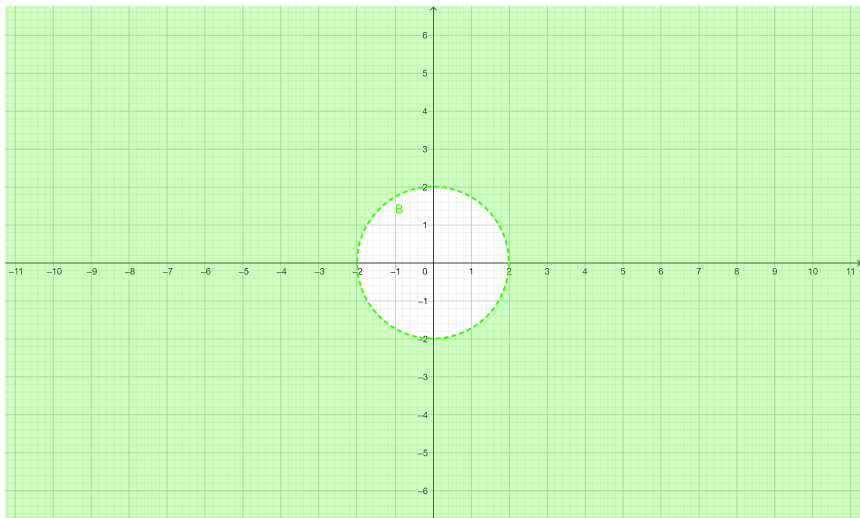
$$D = B \cap C$$

Solución:

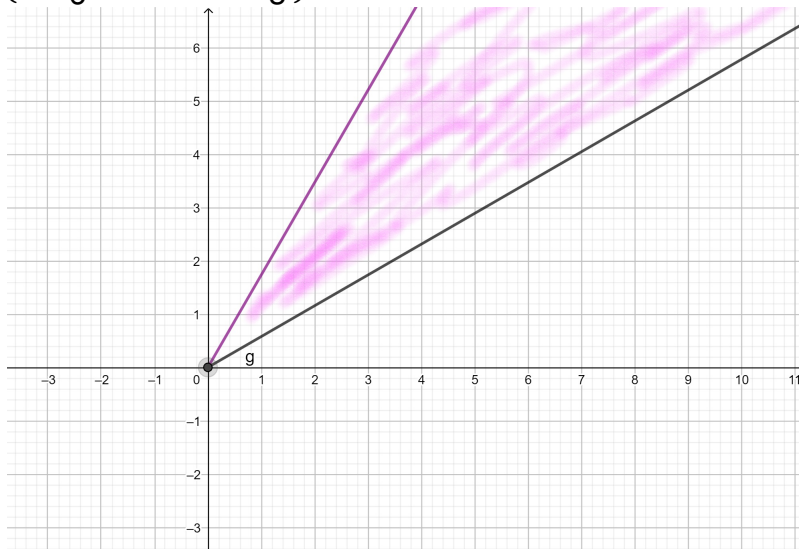
$$A = \{z : |\operatorname{Im}(z)| > 1\}$$



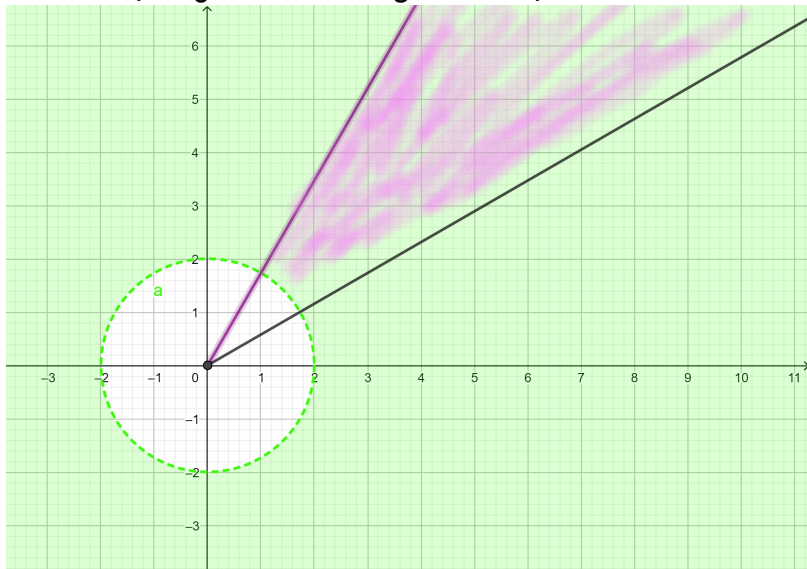
$$B = \{z : |z| > 2\} :$$



$$C = \left\{ z : \frac{\pi}{6} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{3} \right\} :$$



$$D = B \cap C = \left\{ z : \frac{\pi}{6} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}, |z| > 2 \right\} :$$



Homografías: introducción

Hallar los $z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z+3}{z-3} \right| = R : R > 0$

Solución: Sea $z \in \mathbb{C}$ que verifica la ecuación; elevando al cuadrado:

$$\left| \frac{z+3}{z-3} \right|^2 = R^2 \iff R^2 |z-3|^2 = |z+3|^2 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} &= (z+3)\overline{(z+3)} = (z+3)(\bar{z}+\bar{3}) = (z+3)(\bar{z}+3) \\ &= z\bar{z} + 3(z+\bar{z}) + 9 \\ &= |z|^2 + 3(z+\bar{z}) + 9 \end{aligned}$$

Análogamente,

$$|z-3|^2 = |z|^2 - 3(z+\bar{z}) + 9$$

Reemplacemos en (*):

$$R^2 (|z|^2 - 3(z + \bar{z}) + 9) = |z|^2 + 3(z + \bar{z}) + 9 (*)$$

que es equivalente a

$$0 = (1 - R^2)(|z|^2 + 9) + (z + \bar{z})(3 + 3R^2)$$

Consideremos ahora los casos $R = 1$ y $R \neq 1$.

• $R = 1$:

$$0 = \underbrace{(1 - R^2)}_{=0} (|z|^2 + 9) + (z + \bar{z}) \underbrace{(3 + 3R^2)}_{=6}$$

Por lo tanto,

$$0 = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \Rightarrow z = iy : y \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, el conjunto buscado es la **recta vertical**

$$\mathcal{L} := \{z \in \mathbb{C} : z = iy, y \in \mathbb{R}\}$$

- $R \neq 1$: dividimos por $1 - R^2$

$$0 = |z|^2 + 9 + 3(z + \bar{z}) \frac{(1 + R^2)}{(1 - R^2)}$$

Recordemos la fórmula de arriba para $a \in \mathbb{R}$

$$|z + a|^2 = |z|^2 + (z + \bar{z})a + a^2$$

y completemos cuadrados con $a = 3 \frac{(1 + R^2)}{(1 - R^2)}$:

$$\left[|z|^2 + 3(z + \bar{z}) \frac{(1 + R^2)}{(1 - R^2)} + \left(3 \frac{(1 + R^2)}{(1 - R^2)} \right)^2 \right] - \left[\frac{3(1 + R^2)}{1 - R^2} \right]^2 + 9 = 0$$

equivalente a una ecuación del tipo $|z - z_0|^2 = \text{radio}^2$:

$$\left| z + 3 \frac{(1 + R^2)}{(1 - R^2)} \right|^2 = \left[\frac{3(1 + R^2)}{1 - R^2} \right]^2 - 9 > 0$$

donde el número anterior es **positivo**:

$$\left[\frac{3(1 + R^2)}{1 - R^2} \right]^2 - 9 > 0$$

$$\iff \left[\frac{1 + R^2}{1 - R^2} \right]^2 > 1 \iff 1 + R^2 > |1 - R^2| \quad (*)$$

lo cual vale pues $R^2 > 0$, es decir

$$1 + R^2 > (*) |1 - R^2| = \begin{cases} 1 - R^2 & \text{si } 1 > R^2 \text{ y vale } (*) \iff 2R^2 > 0 \\ -1 + R^2 & \text{si } 1 < R^2 \text{ y vale } (*) \iff 1 > -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, en este caso el conjunto dado es una **circunferencia**

de centro en $z_0 = -\frac{3(1 + R^2)}{1 - R^2}$ y radio $3\sqrt{\left[\frac{(1 + R^2)}{1 - R^2} \right]^2 - 1}$ ✓

Llamemos $f(z) = \frac{z+3}{z-3} \Rightarrow f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una homografía

- Si $R = 1$, $\Rightarrow f$ lleva:

$$\text{el eje imaginario} \mapsto \{w \in \mathbb{C} : |w| = R\}$$

- $R \neq 1$, $\Rightarrow f$ lleva circunferencia de centro en $z_0 = -\frac{3(1+R^2)}{1-R^2}$

y radio $3\sqrt{\left[\frac{(1+R^2)}{1-R^2}\right]^2 - 1}$

$$\mapsto \{w \in \mathbb{C} : |w| = R\} \quad \checkmark$$