

MATEMÁTICA 4

Patricia Jancsa

INTEGRACIÓN COMPLEJA

Miércoles 28/9/2022

Integrales Complejas

Ejercicio 1. a) Resolver la integral impropia

$$\int_0^\infty e^{zt} dt \text{ sabiendo que } z = a + bi : a < 0,$$

Solución: a)

$$\int_0^\infty e^{zt} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{zt} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{z} e^{zt} \Big|_0^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{z} [e^{zR} - 1] (*)$$

Pero el límite anterior es de tipo cero x acotado pues

$$a < 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} e^{aR} = 0$$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{z} [e^{aR} (\cos(bR) + i \sin(bR)) - 1] = -\frac{1}{z}$$

Ejercicio 1. b) Resolver $\int_{e^2}^{e^9} \log(it) dt$

Solución: 1. b)) Calculemos la primitiva por partes del $\ln(x)$ en \mathbb{R} :

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cdot [\ln(x) - 1]$$

Luego, usando la definición de **logaritmo complejo**:

$$\int_{e^2}^{e^9} \log(it) dt = \int_{e^2}^{e^9} [\ln|it| + i \operatorname{Arg}(it)] dt = \int_{e^2}^{e^9} [\ln t + i \frac{\pi}{2}] dt$$

$$= t \cdot [\ln(t) - 1] \Big|_{e^2}^{e^9} + i \frac{\pi}{2} t \Big|_{e^2}^{e^9} = (6 + i \frac{\pi}{2})(e^9 - e^2) \quad \checkmark$$

Integral de línea a lo largo de una curva

Definición: Dado un dominio abierto y conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(z) + iv(z)$ continua sobre la curva \mathcal{C}^1 a trozos $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$,

la **integral de línea de f a lo largo de γ** se define como

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt$$

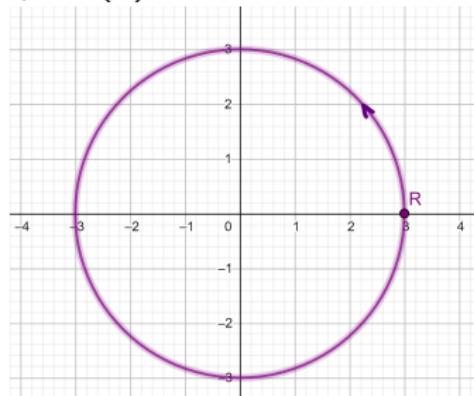
$$= \int_a^b [u(z(t)) + iv(z(t))] [x'(t) + iy'(t)] dt$$

Integrales de línea

Ejercicio 2. Calcular $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ a lo largo de $\gamma : |z| = R$ recorrida una vez en sentido antihorario a partir de $z = R$.

Solución. Parametricemos

$$\gamma : z(t) = Re^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi \implies z'(t) = Rie^{it}$$



$$z(0) = z(2\pi) = R$$

Parametricemos $\gamma : z(t) = R\text{e}^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi \implies z'(t) = R\text{i}\text{e}^{it}$

Integrando $= f(z(t)) \cdot z'(t) = R\text{e}^{-it} \cdot R\text{i}\text{e}^{it} = R^2 i\text{e}^{-it+it} = R^2 i$

$$\implies \int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2 i \, dt = R^2 i \int_0^{2\pi} 1 \, dt$$

$$= 2\pi R^2 i \quad \checkmark$$

Teoremas de Integración para f continua

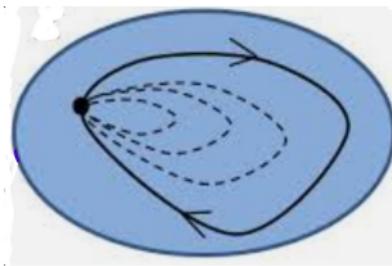
Teorema 1: Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, con D abierto y conexo. Son equivalentes:

- f tiene una primitiva, es decir, existe $F : D \rightarrow \mathbb{C} : F' = f$ en D
- Si γ va del punto p al punto q en D , la integral $\int_{\gamma} f(z)dz$ depende sólo de p y q pero no del recorrido.
- Si γ es una curva cerrada contenida en D , la integral $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ ✓

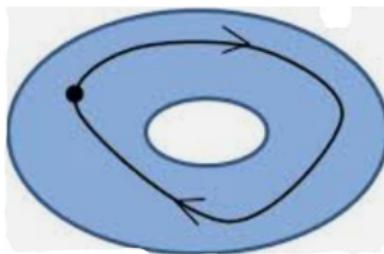
Conjuntos simplemente conexos

Un conjunto U es simplemente conexo si no tiene agujeros, es decir, si todo punto interior a su frontera, pertenece a U .

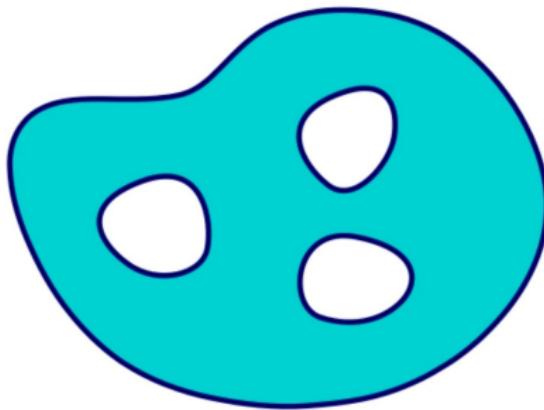
Equivalentemente, U es simplemente conexo si toda curva en U se puede deformar de forma continua a un punto.



Conjuntos no simplemente conexos



La curva
no se contrae a un punto
de forma continua



El conjunto tiene agujeros

Teoremas para f holomorfa

Teorema 2: Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, con D simplemente conexo, entonces existe $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in D$

Corolario: Si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, con D simplemente conexo, entonces vale el teorema 1.

¿Existe h holomorfa tal que $h'(z) = \bar{z}$?

¿Existe h holomorfa tal que $h'(z) = \bar{z}$?

Ejercicio 2 \Rightarrow la integral de $f(z) = \bar{z}$ a lo largo de la curva cerrada $\gamma : |z| = R$ es distinta de 0

\implies no existe h holomorfa tal que $h'(z) = \bar{z}$

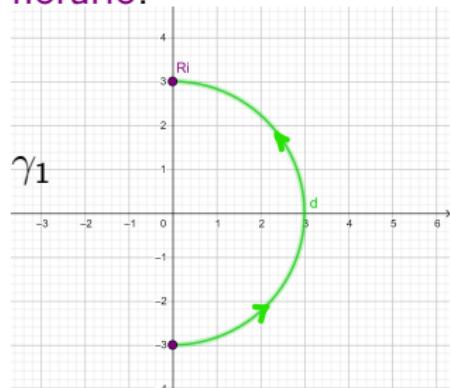
$\implies f(z) = \bar{z}$ no es holomorfa en ningún disco que contiene a $z = 0$

Dos curvas distintas que unen los mismos puntos

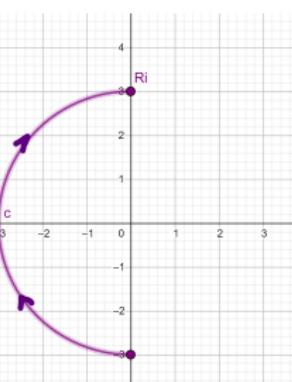
Ej. 3. Calculemos $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ donde γ es una semicircunferencia $|z| = R$ de $p = -Ri$ a $q = Ri$,

a) γ_1 contenida en el semiplano $x \geq 0$, recorrida en sentido antihorario.

b) γ_2 contenida en el semiplano $x \leq 0$, recorrida en sentido horario.



γ_2



Solución 3. a. Parametricemos γ_1 antihorario de $p = -Ri$ a

$$q = Ri \implies z(t) = Re^{it} : -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Integrando} = f(z(t)) \cdot z'(t) = Re^{-it} \cdot Rie^{it} = R^2 ie^{-it+it} = R^2 i$$

$$\implies \int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(z(t))z'(t) \, dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 i \, dt = R^2 i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt$$

$$= R^2 i \cdot \pi$$

Solución 3. b. γ_2 en sentido horario

γ en sentido horario de $p = -Ri$ a $q = Ri$

$$\implies z(t) = Re^{-it} : \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}\implies \text{Integrando} &= f(z(t)) \cdot z'(t) = Re^{+it} \cdot (-Rie^{-it}) \\ &= -R^2ie^{-it+it} = -R^2i\end{aligned}$$

$$\implies \int_{\gamma} f(z) \ dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(z(t))z'(t) \ dt$$

$$= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} R^2i \ dt = -R^2i \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 1 \ dt$$

$$= -R^2i \cdot \pi$$

Integral a lo largo de dos caminos distintos que unen p con q

Ejercicio 3 \implies la integral de $f(z) = \bar{z}$ a lo largo de dos caminos distintos que unen p con q da valores distintos

$\implies f(z) = \bar{z}$ no es la derivada de ninguna holomorfa

$\implies f(z) = \bar{z}$ no es holomorfa en ningún abierto de \mathbb{C}

Ejercicio 4. Sea γ la curva cerrada dada por la circunferencia centrada en el origen de radio 4, simple, suave a trozos, recorrida una vez en sentido positivo, desde $z = 4$.

Parametrizar γ y calcular:

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) \, dz$$

Solución:

- Parametricemos la circunferencia de radio 4:

$$z(t) = 4e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi$$

- Integrando $= \operatorname{Re}(z(t))z'(t) \, dt = 4^2 \cos(t)i e^{it} \, dt$

$$= 4^2 \cos(t)[- \sin(t) + i \cos(t)] \, dt$$

$$\begin{aligned}
 \implies \int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) \, dz &= \int_{\text{circunferencia}} \operatorname{Re}(z) \, dz \\
 &= \int_0^{2\pi} 4^2 \cos(t) \left[-\sin(t) + i \cos(t) \right] dt \\
 &= -4^2 \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin(t) \, dt + 4^2 i \int_0^{2\pi} \left[\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right] \, dt \\
 &= 4^2 \left[\frac{1}{2} \cos^2(t) + i \left(\frac{2t + \sin(2t)}{4} \right) \right] \Big|_{t=0}^{t=2\pi}
 \end{aligned}$$

$$= 4^2 \frac{4\pi i}{4} = 16\pi i \quad \checkmark$$

Ejercicio 5.

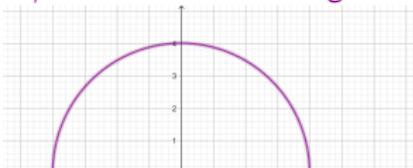
Sea γ la curva cerrada dada por el segmento $[-4, 4]$ seguido de la semicircunferencia centrada en el origen de radio 4, contenida en el semiplano superior. Parametrizar γ simple, suave a trozos, recorrida una vez en sentido positivo, desde $z = 4$. Calcular:

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz$$

Explique por qué la integral no necesariamente debe ser cero.

Solución:

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz = \int_{\text{segmento}} \operatorname{Re}(z) dz + \int_{\text{semicircunferencia}} \operatorname{Re}(z) dz$$



- Parametricemos el segmento $[-4, 4]$:

$$z(t) = -4 + 8t : 0 \leq t \leq 1$$

$$\implies \text{integrando} = \operatorname{Re}(z(t))z'(t) = \operatorname{Re}(-4+8t) \cdot 8 = 32(-1+2t)$$

- Parametricemos la semicircunferencia de radio 4:

$$z(t) = 4e^{it} : 0 \leq t \leq \pi$$

$$\implies \text{integrando} = \operatorname{Re}(z(t))z'(t)$$

$$= 4^2 \cos(t)ie^{it} = 4^2 \cos(t)[- \sin(t) + i \cos(t)]$$

$$\implies \int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz = \int_{\text{segmento}} \operatorname{Re}(z) dz + \int_{\text{semicircunferencia}} \operatorname{Re}(z) dz$$

$$= \int_0^1 32(-1 + 2t) dt + \int_0^\pi 4^2 \cos(t) \left[-\sin(t) + i \cos(t) \right] dt$$

$$= 8[-1 + 2t]^2 \Big|_{t=0}^{t=1} + 4^2 \left(\frac{1}{2} \cos^2(t) + i \left[\frac{2t + \sin(2t)}{4} \right] \right) \Big|_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= 0 + 4^2 \frac{\pi i}{2} = 8\pi i \quad \checkmark$$

Ejercicio 6. a) Calcular $\int_{\sigma} |z|^2 dz$; $\sigma : |z| = R$ recorrida una vez en sentido positivo.

Parametricemos $z(t) = Re^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\implies f(z(t)) \cdot z'(t) = R^2 i e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} |z|^2 dz &= \int_0^{2\pi} R^3 i e^{it} dt = R^3 \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} e^{it} dt \\&= R^3 \cdot i \cdot \frac{1}{i} e^{it} \Big|_0^{2\pi} = R^3 \cdot (e^{2\pi i} - e^0) = R^3 \cdot (1 - 1) = 0\end{aligned}$$

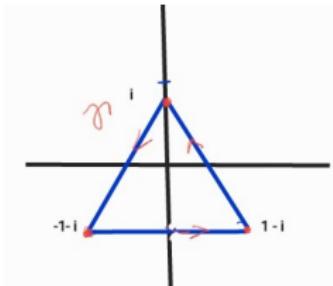
aunque $f(z) = |z|^2$ no sea holomorfa.

Ejercicio 6. b) Calcular $\int_{\gamma} |z|^2 dz$: γ la poligonal cerrada dada por la concatenación de 3 segmentos

$$\gamma : -1 - i \rightarrow 1 - i \rightarrow i \rightarrow -1 - i$$

Concluir que $f(z) = |z|^2$ no es holomorfa.

Segmento $P \rightarrow Q \implies z(t) = P + t(Q - P) : 0 \leq t \leq 1$:



$|z|^2$ no es holomorfa

La poligonal cerrada γ es la concatenación de 3 segmentos:

$$\gamma : -1 - i \rightarrow 1 - i \rightarrow i \rightarrow -1 - i$$

Segmento $P \rightarrow Q \implies z(t) = P + t(Q - P) : 0 \leq t \leq 1$:

- $z_1(t) = -1 - i + 2t \rightarrow z'(t) = 2$

$$\rightarrow f(z(t)) \cdot z'(t) = [(-1 + 2t)^2 + 1] \cdot 2$$

- $z_2(t) = 1 - i + t(-1 + 2i) \rightarrow z'(t) = -1 + 2i$

$$\rightarrow f(z(t)) \cdot z'(t) = [(1 - t)^2 + (-1 + 2t)^2] \cdot (-1 + 2i)$$

- $z_3(t) = i + t(-1 - 2i) \rightarrow z'(t) = (-1 - 2i)$

$$\rightarrow f(z(t)) \cdot z'(t) = [t^2 + (1 - 2t)^2] \cdot (-1 - 2i)$$

$$\implies \int_{\gamma} |z|^2 dz = \int_{z_1} |z|^2 dz + \int_{z_2} |z|^2 dz + \int_{z_3} |z|^2 dz$$

$|z|^2$ no es holomorfa \Rightarrow a lo largo de curvas distintas se obtienen resultados distintos

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} |z|^2 dz &= \int_{z_1} |z|^2 dz + \int_{z_2} |z|^2 dz + \int_{z_3} |z|^2 dz \\ &= \int_0^1 [(-1+2t)^2 + 1] \cdot 2 dt + \int_0^1 [(1-t)^2 + (-1+2t)^2] \cdot (-1+2i) dt \\ &\quad + \int_0^1 [t^2 + (1-2t)^2] \cdot (-1-2i) dt \\ &= \frac{8}{3} + (-1+2i)\frac{2}{3} - (1+2i)\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Problema: $|z|^2$ no es holomorfa

Solución: se integra sin problema a lo largo de curvas sólo por definición

INTEGRALES DE FUNCIONES HOLOMORFAS

Integrales de funciones holomorfas

Ej 6. Calcular $\int_{\sigma} 2(z+1)^3 + e^{\pi z i} dz$ donde σ es la poligonal dada por la concatención de los segmentos:

$$z_0 = 0 \rightarrow z_1 = 1 \rightarrow z_2 = 1 + i \rightarrow z_3 = -1 + 2i$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} 2(z+1)^3 + e^{\pi z i} dz &= \left[\frac{2}{4}(z+1)^4 + \frac{1}{\pi i} e^{\pi z i} \right] \Big|_0^{-1+2i} \\ &= \frac{1}{2}[(2i)^4 - 1] + \frac{1}{\pi i} \left[e^{\pi i(-1+2i)} - 1 \right] \\ &= \frac{15}{2} + \frac{1}{\pi i} \left[e^{-2\pi} - 2 \right]\end{aligned}$$



Singularidades fuera de la región

Ej. 7. Sea C la circunferencia $|z| = 1$ recorrida una sola vez en sentido positivo. Use el Teorema de Cauchy para comprobar que son nulas las siguientes integrales.

$$a) \int_C \frac{z^3}{(z+3)^6} dz$$

$$b) \int_C \frac{(z + \operatorname{senh}(2z))^2}{\cos z} dz$$

$$c) \int_C \frac{e^{2z} + 3 \tanh z}{z^2 + 4} dz$$

$$d) \int_C \frac{3 \operatorname{sen}^2 z}{z^2 - 7z + 7} dz$$

$$e) \int_C \frac{1 + \tan^2 z}{\cosh^2 z} dz$$

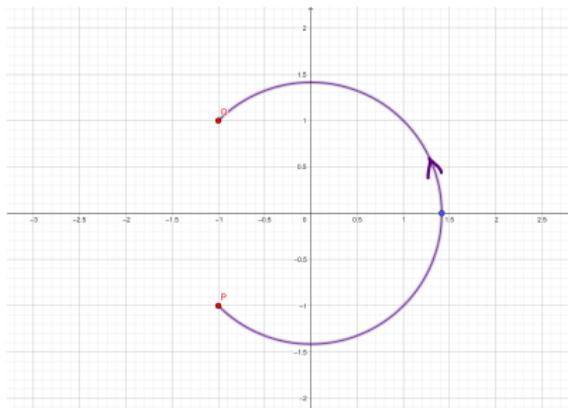
$$f) \int_C \frac{z^2 + 3z + 4}{z^4 - 7z^3 + 3z^2 + 28z - 28} dz$$

Ayuda para el ítem f: El denominador es divisible por $z^2 - 4$

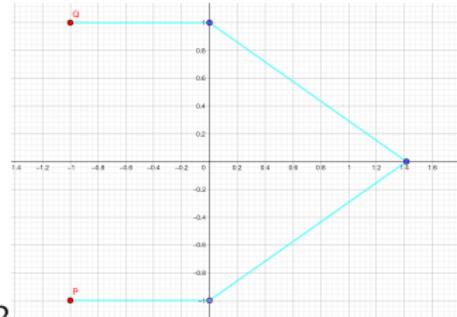
Integral de h' holomorfa

Ej 8. Calcular $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$: γ une $p = -1 - i$ y $q = -1 + i$:

- a) $\gamma_1 : |z| = \sqrt{2}$ recorrida una vez en sentido antihorario.
- b) γ_2 la poligonal que une los puntos $p \rightarrow -i \rightarrow 1 \rightarrow i \rightarrow q$



γ_1

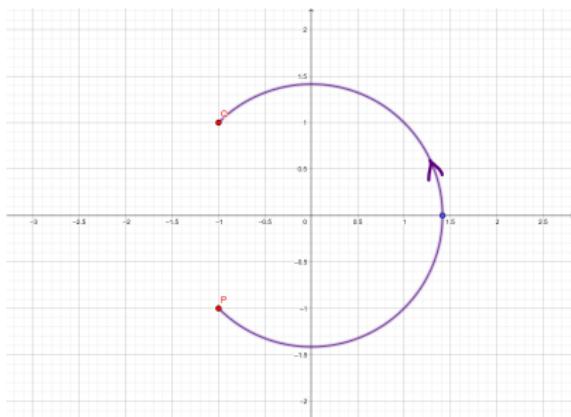


γ_2

Solución 8. a) $\gamma : \implies z(t) = \sqrt{2}e^{it} : -\frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$

$$\text{Integrando} = f(z(t)) \cdot z'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}e^{it}} \cdot \sqrt{2}ie^{it} = i$$

$$\implies \int_{\gamma} f(z) \ dz = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(z(t)) \cdot z'(t) \ dt = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} i \ dt = \frac{3\pi}{2}i$$



γ

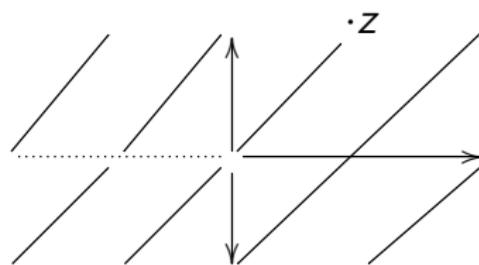
Pero $\oint h' = \frac{1}{z}$ para alguna h holomorfa?

Teorema 1: Ω abierto, $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, γ curva simple suave que une p con q

$\Rightarrow \int_{\gamma} h'(z) dz = h(q) - h(p)$ no depende de γ

$\oint \frac{1}{z}$ para alguna h holomorfa? Sí, para el log principal

$$h(z) = \text{Log}(z) : \Omega_{-\pi} \rightarrow U_{-\pi}$$



$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \text{Log}(q) - \text{Log}(p)$$

$$\begin{aligned}
 \implies \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= \text{Log}(q) - \text{Log}(p) \\
 &= \ln|q| + i \arg(q) - [\ln|p| + i \arg(p)] \\
 &= \ln|-1+i| + i \arg(-1+i) - \left[\ln|-1-i| + i \arg(-1-i) \right] \\
 &= \ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i - \left[\ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i \right] = \frac{3\pi}{2}i;
 \end{aligned}$$

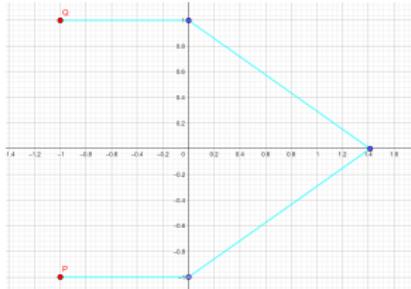
Dados $p, q \in \Omega_{-\pi} = \text{dominio del log principal}$, la integral a lo largo de cualquier curva $\gamma \subseteq \Omega_{-\pi}$ da el mismo valor y éste es igual al valor de su primitiva $\text{Log}(z)$ en $\Omega_{-\pi}$ evaluada en q menos en p .

A lo largo de otra curva que se puede deformar continuamente (homotópica) a la anterior, da el mismo el resultado

Solución 8. b) $\gamma = \text{poligonal dada o cualquier curva que va de } p \text{ a } q \text{ contenida en el mismo dominio } \Omega_{-\pi}$

Atención: $h'(z) = \frac{1}{z} = \text{ derivada del mismo } h(z) = \text{Log}(z)$

pues γ está contenida en el mismo dominio $\Omega_{-\pi}$



$$\implies \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{3\pi}{2}i$$

Atención: el resultado cambia si se integra a lo largo de una nueva curva no contenida en el mismo dominio $\Omega_{-\pi}$, que no se puede deformar continuamente a la anterior.

Ejercicio 8. c) Calcular $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ con γ el arco de circunferencia que va de p a q , en sentido horario, por definición.

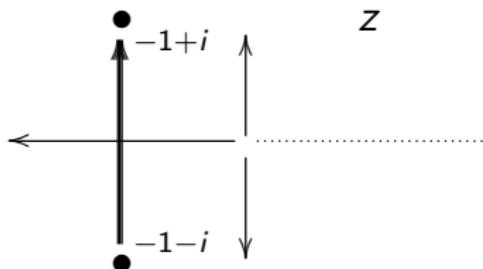
$$z(t) = Re^{-it} : \frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \implies \gamma \text{ no está contenido en } \Omega_{-\pi}.$$

$$\begin{aligned}\text{Integrando} &= f(z(t)) \cdot z'(t) = \frac{1}{R} e^{+it} \cdot (-Rie^{-it}) \\ &= -ie^{-it+it} = -i\end{aligned}$$

$$\implies \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} f(z(t)) z'(t) dt = -\frac{\pi}{2} i \quad \checkmark$$

Atención: el resultado cambia si se integra a lo largo de una nueva curva no contenida en el mismo dominio $\Omega_{-\pi}$, que no se puede deformar continuamente a la anterior.

Ejercicio 8. d) Calcular $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ con $\gamma = \text{segmento vertical}$ que va de p a q , por definición.



$\Rightarrow \gamma$ no está contenido en $\Omega_{-\pi}$. Parametricemos
 $z(t) = -1 - i + 2it : 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow z'(t) = 2i$

Parametricemos

$$z(t) = -1 - i + 2it : 0 \leq t \leq 1 \implies z'(t) = 2i$$

$$\implies \text{integrando} = \frac{1}{z} dz$$

$$= 2i \cdot \frac{1}{-1 - i + 2ti} = 2i \frac{-1 - (2t - 1)i}{|-1 + (2t - 1)i|^2} = 2 \frac{-i + (2t - 1)}{1 + (2t - 1)^2}$$

$$\implies \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2 \int_0^1 \frac{-i + (2t - 1)}{(1 + (2t - 1)^2)} dt$$

$$\begin{aligned}
 & \implies \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2 \int_0^1 \frac{-i + (2t - 1)}{(1 + (2t - 1)^2)} dt \\
 &= -i \cdot \int_0^1 \frac{2}{(1 + (2t - 1)^2)} dt + 2 \int_0^1 \frac{(2t - 1)}{(1 + (2t - 1)^2)} dt \\
 &= \left[-i \arctan(2t - 1) + \ln(1 + (2t - 1)^2) \right] \Big|_0^1 \\
 &= [-i \arctan(1) + \ln 2] - [-i \arctan(-1) + \ln 2]
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}\pi i + \left(-\frac{1}{4}\pi i \right) = -\frac{\pi}{2}i \quad \checkmark$$

Obtuvimos un resultado distinto pues la primitiva corresponde a otra rama del logaritmo: $\log : \Omega_0 \rightarrow U_0$ con $\arg(z) \in (0, 2\pi)$

Ej. 8. e) Calcular $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ usando la primitiva $\log : \Omega_0 \rightarrow U_0$,
donde $\gamma = \text{segmento vertical que va de } p \text{ a } q$

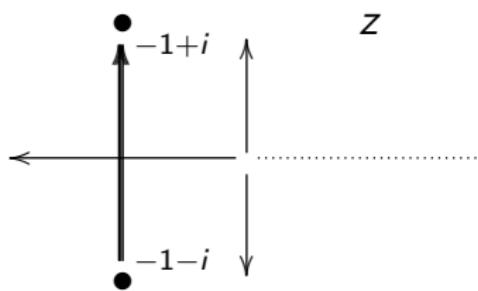
$$\frac{1}{z} = \log'(z) : \Omega_0 \rightarrow U_0$$

$\Rightarrow \gamma$ está contenido en $\Omega_0 \Rightarrow$ usemos su primitiva en Ω_0

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = [\ln|z| + i \arg(z)] \Big|_p^q$$

$$\begin{aligned} &= [\ln|-1+i| + i \arg(-1+i)] - [\ln|-1-i| + i \arg(-1-i)] \\ &= \ln|2| + \frac{3}{4}\pi i - \left(\ln|2| + \frac{5}{4}\pi i \right) = -\frac{\pi}{2}i \end{aligned}$$

$$h(z) = \log z : \Omega_0 \rightarrow U_0$$



Conclusión

$f(z) = \frac{1}{z}$ no es holomorfa en ningún dominio simplemente conexo que contiene a 0

Atención: $\frac{1}{z}$ no tiene primitiva en ningún Ω

que contenga a la circunferencia completa

pues su primitiva $\log : \Omega_\alpha \rightarrow U_\alpha$ está definida en

$\Omega_\alpha = \mathbb{C} -$ la semirrecta de los z de argumento α

$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ sólo se puede calcular por definición:

Fórmula Integral de Cauchy

Ej 8. f) Calcular $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$, con $\gamma : z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
toda la circunferencia, recorrida una vez en sentido antihorario.

La integral no depende de la curva, siempre que sea cerrada y rodee al $z = 0$ una sola vez; la calculamos usando
 $\gamma : Re^{it} \Rightarrow \gamma'(t) = Rie^{it} dt$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} Rie^{it} i dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

Este resultado es fundamental y se usará en futuros cálculos como **Fórmula Integral de Cauchy**

Atención $\frac{1}{z}$ no es holomorfa en ningún dominio simplemente conexo que contiene a 0

No se pueden usar los teoremas de integración para $f(z) = \frac{1}{z}$ pues

- $\frac{1}{z}$ no es holomorfa en ningún dominio simplemente conexo que contiene a $z_0 = 0$
 - $\frac{1}{z}$ no es la derivada de una función holomorfa definida en ningún dominio simp. conexo que contenga a $z_0 = 0$
- Solución: se integra correctamente
- sin problema a lo largo de curvas sólo por definición
 - Por Fórmula Integral de Cauchy $\implies \int_{\sigma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$