

INTEGRACIÓN COMPLEJA

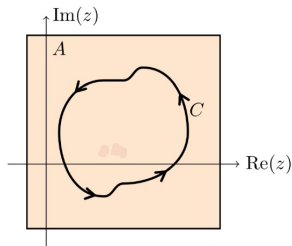
FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

Matemática 4

Patricia Jancsa

Teoremas de Integración

Teorema de Cauchy - Goursat. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, γ curva cerrada, frontera de un dominio Ω simplemente conexo tal que $\overline{\Omega} \subset U$ (o sea, todos los puntos interiores a la curva están en U)



$$\implies \int_{\gamma=\partial\Omega} f(z) dz = 0$$

Corolario: $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, γ_1, γ_2 con mismos puntos iniciales y finales: $\gamma_1 \cup \gamma_2^{op} =$ frontera de un dominio simplemente conexo $\Omega \subset U \implies \int_{\gamma_1} h(z) dz = \int_{\gamma_2} h(z) dz$

Ejercicio fundamental de una integral $\neq 0$

Lema. Sea $\gamma : |z| = R$ la circunferencia de centro en el origen y radio $R > 0$, recorrida una sola vez en sentido antihorario, entonces la integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

Análogamente,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - \omega} dz = 2\pi i \quad \text{si } \gamma : |z - \omega| = R$$

Comprobación: $\frac{1}{z}$ no hay una primitiva en ningún Ω que contenga a la circunferencia completa, pues cualquier primitiva es $\log : \Omega_{\alpha} \rightarrow U_{\alpha}$ que está definida en

$\Omega_{\alpha} = \mathbb{C} -$ la semirrecta de los z de argumento α

$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ sólo se puede calcular por definición

$$\gamma : z(t) = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} Re^{it} i dt = \int_0^{2\pi} i dt \\ &= 2\pi i \quad \checkmark \end{aligned}$$

Notar que la integral **no depende de R**

Punto singular

Definición: Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ es un cociente de funciones holomorfas en un abierto U , el dominio de f es

$$\text{Dom}(f) = \{z \in U : h(z) \neq 0\}$$

Es decir, los ceros de h quedan fuera del dominio de f y se llaman

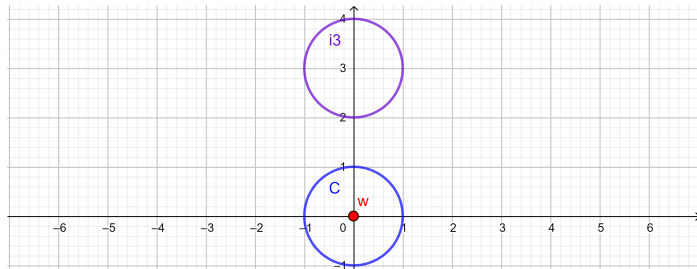
puntos singulares de f

Ejercicio 0 ¿cuándo la integral es cero?

Todo depende entonces de que el **punto singular** sea **interior a la curva o no lo sea**; si γ simple, cerrada:

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

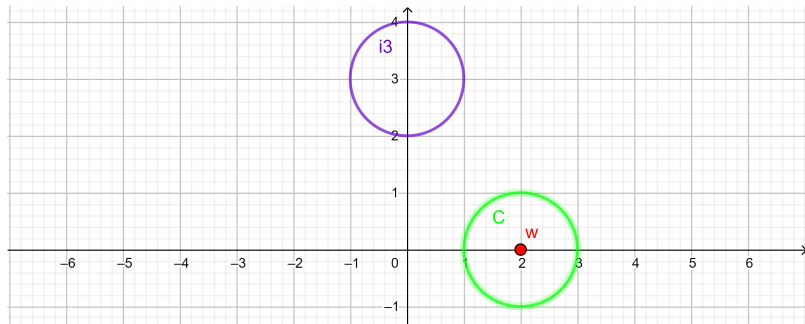
pero $\int_{|z-3i|=1} \frac{1}{z} dz = 0$ pues el **punto singular** $w = 0 \notin \Omega$



Análogamente

$$\int_{|z-2|=1} \frac{1}{z-2} dz = 2\pi i$$

pero $\int_{|z-3i|=1} \frac{1}{z-2} dz = 0$ pues el punto singular $z = 2 \notin \Omega$ ✓



Fórmula Integral de Cauchy

Sea U abierto, $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, Ω un dominio simplemente conexo tal que $\overline{\Omega}$ está contenido en U y $\omega \in \Omega^\circ$ entonces

$$\int_{\partial\Omega} \frac{h(z)}{(z - \omega)} dz = 2\pi i h(\omega)$$

donde la curva se recorre una sola vez en sentido antihorario.

Notar que la función del integrando es holomorfa salvo **en un único punto singular interior a la curva** y la curva rodea este punto, en sentido positivo.

Ejercicio principal:

$$\overline{\Omega} = \{z : |z - \omega| \leq r\} \subset U$$

Ejercicio 1.

Sea γ cualquier curva cerrada tal que $0 \in \Omega^\circ$ donde Ω es la región cuya frontera es la curva: $\gamma = \partial\Omega$.

Calcular la integral usando la fórmula integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

Solución: $h(z) = 1$ con dominio $U = \mathbb{C}$.

Por hipótesis, $\gamma = \partial\Omega$, es decir, Ω = el dominio abierto cuya frontera es la curva y el punto **singular** es $\omega = 0 \in \Omega^\circ$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\partial\Omega} \frac{h(z)}{(z - \omega)} dz = 2\pi i h(\omega) = 2\pi i h(0) = 2\pi i \quad \checkmark$$

donde la curva se recorre una sola vez en sentido antihorario.

Ejercicio 2.

Comprobar que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

si γ es cualquiera de las siguientes, recorrida una sola vez en sentido antihorario

$$\gamma_1 = \{z = x + yi, |x| = M_1, |y| \leq M_2\} \\ \cup \{z = x + yi : |x| \leq M_1, |y| = M_2\}, \quad M_1, M_2 > 0$$

$$\gamma_2 = \{z = x + yi, |x| + |y| = R\}.$$

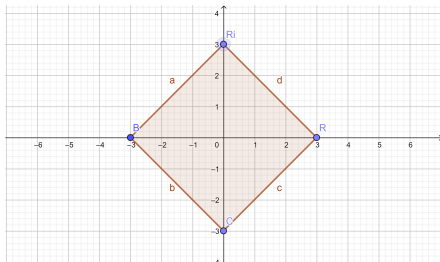
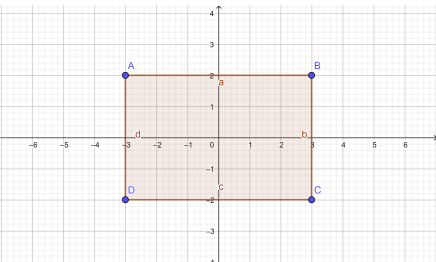
$$\gamma_3 : z(t) = 1 - i + Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad R > 2.$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

Sólo hay que verificar **las hipótesis**:

- $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorfa $\forall z \neq 0$
- $\omega = 0 \in \Omega$, es decir, que $z = 0$ pertenece al interior de la región cuya frontera es la curva, en cada caso:

$$\gamma_1 = \{x+yi : |x| = M_1, |y| \leq M_2\} \cup \{x+yi : |x| \leq M_1, |y| = M_2\}$$



- Si $\gamma_3 : z(t) = 1 - i + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $R > 2$ entonces

$\Omega : |z - (1 - i)| < R$ es la región cuya frontera es la curva

y contiene a $\omega = 0$ pues

$$|\omega - (1 - i)| = |-(1 - i)| = \sqrt{2} < 2 < R$$

Por lo tanto,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \quad \checkmark$$

Ejercicio 3.

Sea $\gamma : |z + 1| = 5$ recorrida una sola vez en sentido antihorario. Calcular

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}\pi z\right)}{z + 2 - i} dz$$

Solución: • En este caso, $h(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}\pi z\right)$ holomorfa para todo z con dominio $U = \mathbb{C}$. Llamemos Ω al dominio cuya frontera es la curva:

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| < 5\}$$

- El denominador se anula en

$$z + 2 - i = 0 \Rightarrow z = -2 + i$$

$\Rightarrow$ el punto **singular** es $\omega = -2 + i \in \Omega^\circ$ pues

$$|\omega + 1| = |(-2 + i) + 1| = |-1 + i| = \sqrt{2} < 5$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{\text{sen}(\frac{1}{4}\pi z)}{z + 2 - i} dz = \int_{\partial\Omega} \frac{h(z)}{(z - \omega)} dz = 2\pi i h(\omega)$$

$$= 2\pi i h(-2 + i) = 2\pi i \text{sen} \left(\frac{1}{4}\pi(-2 + i) \right)$$

$$= 2\pi i \left[\text{sen} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}i \right) \right]$$

$$= 2\pi i \left[\underbrace{\text{sen} \left(-\frac{\pi}{2} \right)}_{=-1} \underbrace{\cos \left(\frac{\pi}{4}i \right)}_{=\cosh \left(\frac{\pi}{4} \right)} + \underbrace{\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right)}_{=0} \underbrace{\text{sen} \left(\frac{\pi}{4}i \right)}_{=i \sinh \left(\frac{\pi}{4} \right)} \right] = -\pi i \left[e^{\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}} \right] \checkmark$$

Ejercicio 4.

Sea $\gamma : z(t) = e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi$. Calcular

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(z+i)}{z(z+1-3i)} dz$$

Solución: • Llamemos Ω a la región cuya frontera es la curva:

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

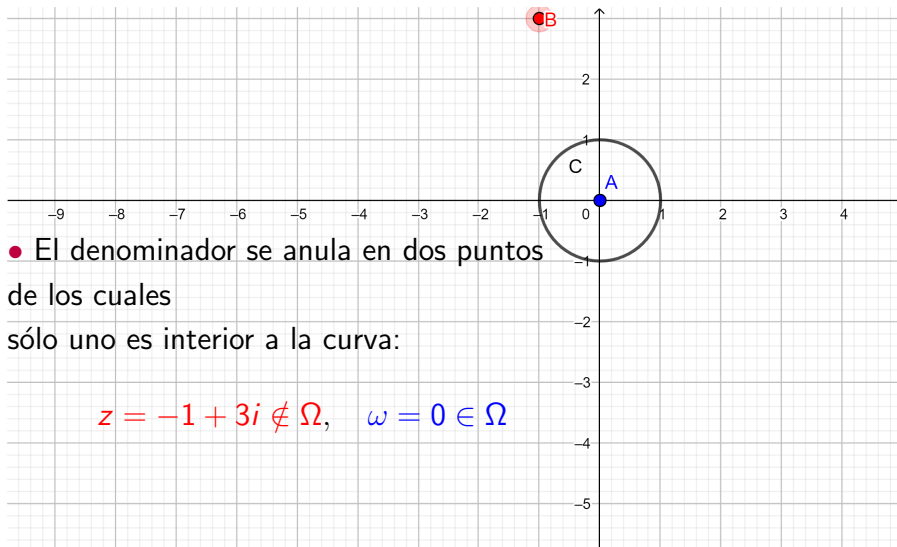
- El denominador se anula en dos puntos:

$$z = -1 + 3i \notin \Omega, \quad \omega = 0 \in \Omega$$

- $h(z) = \frac{\cos(z+i)}{(z+1-3i)}$ holomorfa en

$$U = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -1 + 3i\} \quad \text{y} \quad \Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subset U$$

Ej 4: una única singularidad dentro de la región



• El denominador se anula en dos puntos de los cuales sólo uno es interior a la curva:

$$z = -1 + 3i \notin \Omega, \quad \omega = 0 \in \Omega$$

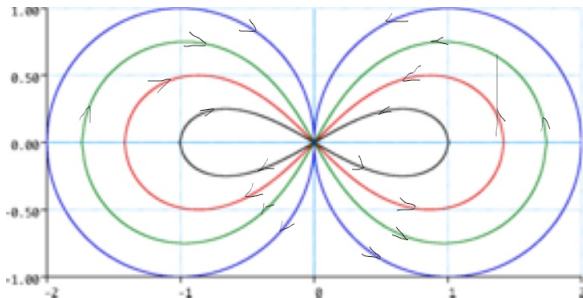
Es decir que elegimos como $h(z)$ a todos los factores holomorfos del integrando:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{\cos(z+i)}{z(z+1-3i)} dz &= \int_{\gamma} \frac{\left[\frac{\cos(z+i)}{(z+1-3i)} \right]}{z} dz = \int_{\partial\Omega} \frac{h(z)}{(z-0)} dz \\&= 2\pi i h(0) = 2\pi i \left[\frac{\cos(z+i)}{(z+1-3i)} \right] \Big|_{z=0} \\&= 2\pi i \frac{\cos(i)}{(1-3i)} = \pi i \left(\frac{e^{-1} + e}{1-3i} \right) \\&= \pi i (1+3i) \left(\frac{e^{-1} + e}{10} \right) \quad \checkmark\end{aligned}$$

donde la curva se recorre una sola vez en sentido antihorario.

Ejercicio 5. Varias Singularidades dentro de la Región

Resolver la integral de línea $\int_{\gamma} \left[\frac{e^{2\pi iz}}{(4z^2 - 1)} + \frac{1}{z - 4i} \right] dz$ a lo largo de γ



que se recorre una sola vez, en sentido antihorario, empezando en el origen, por la curva negra $\rightarrow$ roja $\rightarrow$ verde $\rightarrow$ azul.

Fracciones Simples

Solución: CA sólo para el factor **racional**:

$$\frac{1}{(4z^2 - 1)} = \frac{1}{4} \frac{1}{(z - \frac{1}{2})} - \frac{1}{4} \frac{1}{(z + \frac{1}{2})}$$

Luego, la integral se escribe como suma

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \left[\frac{e^{2\pi iz}}{(4z^2 - 1)} + \frac{1}{z - 4i} \right] dz \\ = \frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{e^{2\pi iz}}{(z - \frac{1}{2})} dz - \frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{e^{2\pi iz}}{(z + \frac{1}{2})} dz - \underbrace{\int_{\gamma} \frac{1}{z - 4i} dz}_{=0} \end{aligned}$$

pues $w = 4i \notin \Omega$ si llamamos a Ω = región cuya frontera es la curva.

γ es la concatenación de los 8 pétalos

Pensemos a la curva como concatenación de 8 curvas: los 4 pétalos de la izquierda y los 4 pétalos de la derecha; escribamos además a toda la curva de la derecha como γ_1 y toda la de la izquierda como γ_2 :

$$\gamma = \gamma_1^+ \cup \gamma_2^-$$

Notar que

- $z = \frac{1}{2}$ es un punto interior a las 4 curvas de la derecha, es decir, está rodeada por 4 curvas simples cerradas que se recorren de manera **positiva**

- $z = \frac{1}{2}$ es un punto interior a las 4 curvas de la izquierda, es decir, está rodeada por 4 curvas simples cerradas, pero que se recorren de manera **negativa**: $\int_{\gamma_2^-} f(z) dz = - \int_{\gamma_2^+} f(z) dz$

Por lo tanto,
$$\int_{\gamma} \left[\frac{e^{\pi iz}}{(4z^2 - 1)} + \frac{1}{z - 4i} \right] dz$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\gamma_1^+} \frac{e^{2\pi iz}}{(z - \frac{1}{2})} dz - \frac{1}{4} \int_{\gamma_2^-} \frac{e^{2\pi iz}}{(z + \frac{1}{2})} dz + 0$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\gamma_1^+} \frac{e^{2\pi iz}}{(z - \frac{1}{2})} dz + \frac{1}{4} \int_{\gamma_2^+} \frac{e^{2\pi iz}}{(z + \frac{1}{2})} dz$$

$$= 4 \cdot 2\pi i \frac{1}{4} \left[h_1\left(\frac{1}{2}\right) + h_2\left(-\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$= 2\pi i [e^{\pi i} + e^{-\pi i}] = -4\pi i \quad \checkmark$$

Fórmula Integral de Cauchy para funciones con potencias en el denominador

Sea U un dominio, $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y Ω un dominio simplemente conexo tal que $\overline{\Omega}$ está contenido en U .

Si $\omega \in \Omega^\circ$ entonces

$$\int_{\partial\Omega} \frac{h(z)}{(z - \omega)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} h^{(n)}(\omega)$$

donde la curva se recorre una sola vez en sentido antihorario, y $h^{(n)}$ denota la derivada de orden n de h .

Ejercicio 6.

Sea $\gamma : z(t) = e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi$. Calcular

$$a) \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$$

$$b) \int_{\gamma} \frac{1}{z^{n+1}} dz \quad \forall n \geq 1$$

Solución: • $h(z) = 1$ para todo z con dominio $U = \mathbb{C}$

• $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

• El único punto **singular** es $\omega = 0 \in \Omega$ con potencia $n + 1 = 2 \implies n = 1$,

$$\implies \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = \int_{\partial\Omega} \frac{h(z)}{(z - 0)^2} dz = \frac{2\pi i}{n!} h'(0) = 0 \quad \checkmark$$

b) Lo mismo $\forall n \geq 1$: atención $h(z) = 1 \Rightarrow \frac{d^n}{dz^n} h(z) = 0 \forall z$,
entonces por **F Integral de Cauchy**

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^{n+1}} dz = \int_{\partial\Omega} \frac{h(z)}{(z-0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n} h(z) \Big|_{z=0} = 0 \quad \checkmark$$

Otra resolución: Estas integrales dan todas **cero** pues las funciones integrando tienen primitiva en el mismo dominio abierto $\Omega = \{z \neq 0\}$:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^{n+1}} dz = \frac{(-1)}{n} \frac{1}{z^n} \Big|_{z=0}^{z=e^{2\pi i}} = 0 \quad \checkmark$$

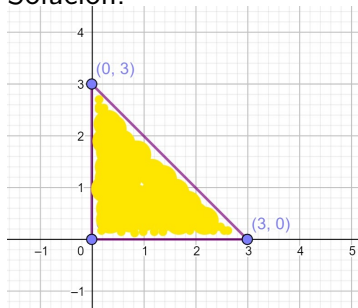
Ejercicio 7.

Resolver la integral de línea a lo largo de σ dada por la poligonal que recorre los vértices

$3 \rightarrow 3i \rightarrow 0 \rightarrow 3$:

$$\int_{\sigma} \left[\frac{1}{(z^2 - z + 1)} + \frac{e^{\pi iz}}{(z - 1 - i)^3} + \frac{1}{z + 2} \right] dz$$

Solución:



Determinemos los **puntos singulares del integrando** que son los ceros de todos los denominadores:

- $0 = z^2 - z + 1 \iff z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

- $z = 1 + i$

- $z = 1 + i$

- $z = -2$

Singularidades: $= \{w = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \overline{w} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, z_0 = 1+i, z_1 = -2\}$

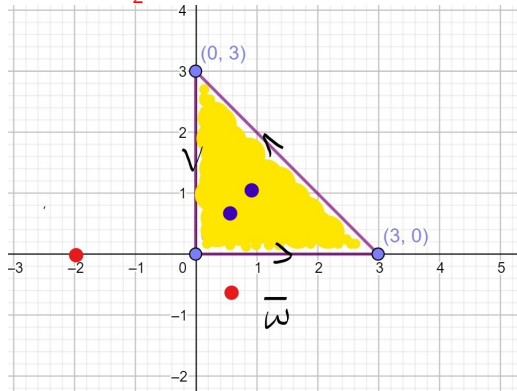
$\Omega = \text{interior del triángulo} = \{z = x+yi \in \mathbb{C} : 0 < x, y, x+y < 3\}$

Tenemos dentro de la región solamente a las que cumplen

$x, y > 0, x + y < 3$:

• $w = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, z_0 = 1+i \in \Omega$

• $\overline{w} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, z = -2 \notin \Omega$



Resolvemos por Fórmula Integral de Cauchy

$$\begin{aligned}& \int_{\sigma} \left[\frac{1}{(z^2 - z + 1)} + \frac{e^{\pi iz}}{(z - 1 - i)^3} + \frac{1}{z + 2} \right] dz \\&= \int_{\sigma} \frac{1}{(z - w)(z - \bar{w})} dz + \int_{\sigma} \frac{e^{\pi iz}}{(z - 1 - i)^3} dz + \underbrace{\int_{\sigma} \frac{1}{z + 2} dz}_{=0} \\&= \int_{\sigma} \frac{1}{z - w} dz + \int_{\sigma} \frac{e^{\pi iz}}{(z - 1 - i)^3} dz \\&= 2\pi i \left[\frac{1}{z - \bar{w}} \Big|_{z=w} + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} e^{\pi iz} \Big|_{z=1+i} \right] = 2\pi i \left[\frac{1}{\sqrt{3}i} + \frac{1}{2} (\pi i)^2 e^{\pi i(1+i)} \right] \\&= 2\pi \left[\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \pi^2 e^{-\pi} i \right] \quad \checkmark\end{aligned}$$