MATEMATICA 2

$\boxed{\textbf{Práctica 6}}$ **- Espacios vectoriales con producto interno**

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

ii) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K$
$\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

iii) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
$\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_2 - x_1.\overline{y}_2 - x_2.\overline{y}_1$

iv) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
$\Phi(x, y) = x_1.\overline{y}_1 - i.x_1\overline{y}_2 + i.x_2\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2$

Ejercicio 2.

i) Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x, y) = x_1.y_1 - 2.x_1.y_2 - 2.x_2.y_1 + 6.x_2.y_2$$

a) Probar que Φ es un producto interno.

b) Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para Φ.

ii) Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 1. iv).

Ejercicio 3. En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en V para el cual la base B resulte ortonormal.

i) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$

ii) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$

iii) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

Ejercicio 4. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ es

$$\Phi(x, y) = a.x_1.y_1 + b.x_1.y_2 + b.x_2.y_1 + b.x_2.y_2 + (1 + b).x_3.y_3$$

un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

i) $\langle , \rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K$, $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

ii) $\langle , \rangle : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}, \ \ \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\, dx$

Ejercicio 6. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \dots, X^n\}$.

Ejercicio 7. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

i) $V = \mathbb{R}^3\,, \quad S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$
para el producto interno canónico.

ii) $V = \mathbb{R}^3\,, \quad S_2 =< (1, 2, 1) >$

a) Para el producto interno canónico.

b) Para el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + 2.x_2.y_2 + x_3.y_3 - x_1.y_2 - x_2.y_1.$$

iii) $V = \mathbb{C}^3\,, \quad S_3 =< (i, 1, 1), (-1, 0, i) >$ para el producto interno canónico

iv) $V = \mathbb{C}^4\,, \quad S_4 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 + 2i.x_2 - x_3 + (1+i).x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i).x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$
para el producto interno $\langle x, y\rangle = x_1.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3 + 3.x_4.\overline{y}_4$.

Ejercicio 8.

i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para cada uno de los productos internos considerados.

ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.

Ejercicio 9.

i) Se considera $\mathbb{C}^{3\times 3}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

ii) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x).g(x)dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S =< 1 >$.

iii) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x).g(x)dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.

Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S =< 1, x, x^2, x^3, \operatorname{sen}(\pi x) >$.

iv) Se considera $C[0, \pi]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t).g(t)dt$.

a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $B = \{1, \cos t, \operatorname{sen} t\}$.

b) Sea S el subespacio de $C[0,\pi]$ generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

Ejercicio 10. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x_1, x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

ii) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

iii) $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iv) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $\quad f(p) = p'$ $\quad$ (donde $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)dx$).

v) $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible, $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $f(A) = P^{-1}.A.P$ $\quad$ (donde $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$).

Ejercicio 11. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y S un subespacio de V. Probar que la proyección ortogonal $P : V \to V$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

Ejercicio 12. En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $O.A.O^t$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13. En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U.A.U^*$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

Ejercicio 15. Dada la tranformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$|f| = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

i) Probar que f es una rotación.

ii) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.