

MATEMATICA 2

Práctica 5 - Forma de Jordan

Ejercicio 1. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9 \times 9}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Dadas las matrices A y A' en $K^{6 \times 6}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- i) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A' .
- ii) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_5[X]$ tales que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A' .
- iii) Calcular A^k para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Sea $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ una matriz nilpotente tal que $A^5 \neq 0$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2 , A^3 , A^4 y A^5 .

Ejercicio 4.

- i) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.
- ii) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$ tal que $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

Ejercicio 5. Hallar la forma y una base de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{v) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = \langle e^x, x \cdot e^x, x^2 \cdot e^x, e^{2x} \rangle$. Sea $t : V \rightarrow V$ la transformación lineal definida por $t(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para t .

Ejercicio 7. Sea $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda_1 Id) &= 13, \text{rg}(A - \lambda_1 Id)^2 = 11, \text{rg}(A - \lambda_1 Id)^3 = 10, \text{rg}(A - \lambda_1 Id)^4 = 10, \\ \text{rg}(A - \lambda_2 Id) &= 13, \text{rg}(A - \lambda_2 Id)^2 = 11, \text{rg}(A - \lambda_2 Id)^3 = 10, \text{rg}(A - \lambda_2 Id)^4 = 9, \\ \text{rg}(A - \lambda_3 Id) &= 13, \text{rg}(A - \lambda_3 Id)^2 = 12, \text{rg}(A - \lambda_3 Id)^3 = 11. \end{aligned}$$

Hallar su forma de Jordan.

Ejercicio 8. Hallar la forma de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. Sea $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Hallar la forma y una base de Jordan para A .

ii) Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 10. Sea $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ una matriz tal que su polinomio característico es $(X - 1)^4$. Probar que A es semejante a A^2 .

Ejercicio 11. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4.a_{n+1} - 4.a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Sugerencia: Ver el Ejercicio 6 de la Práctica 4.

Ejercicio 12. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.