

MATEMATICA 2

Práctica 4 - Autovalores y autovectores - Diagonalización - Subespacios invariantes

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de las matrices que siguen. Decidir si son diagonalizables o no y en caso afirmativo hallar una matriz inversible que la diagonalice. (Analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$ cuando corresponda.)

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & \text{ii)} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} & \text{iii)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \text{iv)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{v)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} & \text{vi)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

i) Encontrar una base B de \mathbb{R}^3 tal que $|f|_B$ sea diagonal.

ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3. Sea $f : K^n \rightarrow K^n$ un proyector con $\dim(\text{Im}(f))=s$. Probar que f es diagonalizable y calcular \mathcal{X}_f .

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$. Determinar todos los a, b y $c \in K$ para los que A es diagonalizable.

Ejercicio 5. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k + k^2 & -k^2 \\ 0 & k + 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k + 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 4, a_1 = 9 \\ a_{n+2} = 5.a_{n+1} - 6.a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

- i) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$. Verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$.
- ii) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$.
- iii) Encontrar una matriz inversible P tal que $P.A.P^{-1}$ sea diagonal.
- iv) Hallar la fórmula general para el término a_n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 7. Encontrar una fórmula general para el término a_n ($n \in \mathbb{N}_0$) de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida por

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

en los siguientes casos:

- i) $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$
- ii) $a_0 = 0, a_1 = 3$

Ejercicio 8. Resolver el sistema de ecuaciones en diferencias (es decir, encontrar una fórmula general para los términos x_n e y_n en función de x_0 e y_0):

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

Ejercicio 9.

- i) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3, y(0) = -1$.

- ii) Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f'' = f\} = \langle e^x, e^{-x} \rangle$.

Sugerencia: Llamar $g = f'$ y considerar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f' = g \\ g' = f \end{cases}$

Ejercicio 10. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = e^{\lambda x}$ es un autovector de δ asociado al autovalor λ . (Observar que entonces δ tiene infinitos autovalores.)

Ejercicio 11. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

- i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a) $P = X - 1$, b) $P = X^2 - 1$, c) $P = (X - 1)^2$
 ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - i.X^2 + 1 + i$

Ejercicio 12. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

- i) Calcular $A^4 - 4.A^3 - A^2 + 2.A - 5.I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
 ii) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
 iii) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \forall n \in \mathbb{N}$
 iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2 .

Ejercicio 13.

- i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3.y, 3.x - 2.y)$. Hallar todos los subespacios de \mathbb{R}^2 que sean f -invariantes.
 ii) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ :

$$|f_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Probar que, para todo $\theta \neq k.\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de \mathbb{R}^2 que sean f_θ -invariantes.

- iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la transformación \mathbb{C} -lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de \mathbb{C}^2 que sean g_θ -invariantes.

Ejercicio 14. Sea $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0)$$

- i) Hallar, para cada $0 \leq i \leq 5$, un subespacio S_i de \mathbb{R}^5 con $\dim(S_i) = i$ que sea f -invariante.

- ii) Probar que no existen subespacios propios f -invariantes S y T de \mathbb{R}^5 tales que $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$.

Ejercicio 15. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\chi_A = (x - \alpha) \cdot (x - z) \cdot (x - \bar{z})$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Sea $g_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ la transformación lineal $g_A(x) = A \cdot x$.

- i) Probar que existe v_1 , autovector de g_A de autovalor α , con todas sus coordenadas reales.
- ii) Sea $w = v_2 + i \cdot v_3$, con $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, un autovector de g_A asociado al autovalor z . Probar que $\bar{w} = v_2 - i \cdot v_3$ es un autovector de g_A de autovalor \bar{z} .
- iii) Se considera $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $f_A(x) = A \cdot x$. Probar que $\langle v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ es un subespacio f_A -invariante de dimensión 2.
- iv) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Verificar que B es una base de \mathbb{R}^3 y hallar $|f_A|_B$.

Ejercicio 16. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, y sea $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $f_A(x) = A \cdot x$. Hallar subespacios propios S y T de \mathbb{R}^3 , f_A -invariantes, tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.