MATEMATICA 2

$\boxed{\text{Práctica 0}}$ **- Repaso de sistemas de ecuaciones lineales y matrices**

A lo largo de esta práctica, K simbolizará el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos, indistintamente.

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales: ($K = \mathbb{R}$)

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \qquad \text{iv)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

¿Cambia algo si $K = \mathbb{C}$?

Ejercicio 2. Encontrar, si es posible, los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$.

Ejercicio 3. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial:

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k^2 - 4)x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Resolver los siguientes sistemas no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados a cada uno de ellos:

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Sea H un sistema lineal no homogéneo y sea p una solución de H. Sea H_0 el sistema lineal homogéneo asociado a H. Probar que si S y S_0 son los conjuntos de soluciones de H y H_0 respectivamente, entonces $S = S_0 + p = \{s + p : s \in S_0\}$.

Ejercicio 6. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$\text{i)} \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 = b \end{cases}$$

Matrices

Ejercicio 7.

i) Exhibir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 = -I$

ii) Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones $\forall n \geq 2$:

a) $(A.B)^2 = A^2B^2$

b) $A.B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$

c) $A.B = A.C$ y A $\neq 0 \Rightarrow$ B = C

d) $A.B = 0 \Rightarrow B.A = 0$

e) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$

f) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I_n$

Ejercicio 8. Si A, $B \in K^{m\times n}$ y $A.x = B.x \ \forall\, x \in K^n$, probar que $A = B$.

Ejercicio 9. Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10. Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible y sean B, $C \in K^{n\times m}$. Probar:

i) $A.B = A.C \Rightarrow B = C$

ii) $A.B = 0 \Rightarrow B = 0$

Ejercicio 11. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar:

i) $A\,,\, B \in K^{n\times n}$ inversibles $\Rightarrow A + B$ es inversible

ii) Definición: Dada $A \in K^{n\times n}$, se llama **matriz transpuesta de** A a la matriz $A^t \in K^{n\times n}$ que cumple que $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}, \forall\, 1 \leq i, j \leq n$. Entonces A inversible $\iff$ A^t inversible.

iv) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N}\ /\ A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

Ejercicio 12. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^n$. Probar que el sistema $A.x = b$ tiene solución única $\iff$ A inversible.