Introducción al Modelado Continuo

Segundo Cuatrimestre 2022

Guía de problemas N° 1: Construcción de modelos con EDOs

Ejercicio 1. Un médico forence es llamado a la escena de un asesinato. La temperatura del cuerpo al momento de hallarlo es de 24°C y una hora más tarde la temperatura cayó a 21°C. Si la temperatura en el cuarto en la que el cuerpo fue encontrado estuvo constantemente a 20°C, ¿cuánto tiempo pasó desde el asesinato hasta que el cuerpo fue hayado?

Asumir que el cuerpo obedece la ley de enfriamiento de Newton,

$$\frac{dT}{dt} = \beta(T - T_R),$$

donde T es la temperatura del cuerpo, β es una constante y T_R es la temperatura del cuarto.

Ejercicio 2. La ecuación diferencial usada para modelar la concentración de glucosa en sagre, digamos $g(t)$ cuando se administra por vía intravenosa en el cuerpo es dada por

$$\frac{dg}{dt} + kg = \frac{G}{100V},$$

donde k es una constante, G es la tasa a la cual la glucosa es administrada y V es el volumen de la sangre en el cuerpo.

Resolver la ecuación diferencial y discutir los resultados obtenidos.

Ejercicio 3. Dos tanques A y B, ambos con volumen V, están llenos con agua a tiempo $t = 0$. Para $t > 0$, una solución de volmen v conteniendo un soluto de masa m fluye hacia el tanque A por segundo; la mezcla fluye del tanque A al tanque B a la misma tasa; y la mezcla resultante fluye hacia afuera del tanque B a la misma tasa. La ecuación diferencial usada para modelar este sistema viene dada por

$$\frac{d\sigma_A}{dt} + \frac{v}{V}\sigma_A = \frac{m}{V}, \qquad \frac{d\sigma_B}{dt} + \frac{v}{V}\sigma_B = \frac{v}{V}\sigma_A,$$

donde $\sigma_{A,B}$ son las concentraciones del soluto en los tanques A y B respectivamente.

Mostrar que la masa del soluto en el tanque B viene dada por

$$\frac{mV}{v}\left(1 - e^{-vt/V}\right) - mte^{-vt/V}.$$

Ejercicio 4. Durante una epidemia, la tasa a la cual las personas sanas se infectan es a por su número, las tasas de recuperación y de muerte son, respectivamente b y c por el número de personas infectadas. Si inicialmente hay N personas sanas y no hay personas enfermas, hallar el número de muertes para tiempo t. ¿Es este modelo realista? ¿Qué otros factores deben ser tenidos en cuenta?

Ejercicio 5. En un estudio experimental de dinámica poblacional de crustáceos (*Daphnia Magna*) de 1963 los autores encontraron que sus mediciones no coincidían con las predicciones del modelo logístico. Usando la variable M (la masa de la población) como un indicador de su tamaño, los autores propusieron el modelo

$$\dot{M} = rM\left(\frac{K - M}{K + aM}\right),$$

donde r, K y a son constantes positivas. Hallar los puntos de equilibrio y determinar su estabilidad.

Ejercicio 6. Una reacción química simple se describe como

$$A + B \xrightarrow{k} C$$

lo que indica que los reactantes A y B se combinan para producir C a una tasa k.

Para modelar reacciones químicas se asume la *Ley de acción de masa.* La misma dice:

Ley de acción de masa: La tasa de cambio de una reacción química elemental es proporcional al producto de las concentraciones de los reactantes.

Escribir las ecuaciones diferenciales que modelan las siguientes reacciones y resolverlas analíticamente o con la ayuda de la computadora.

$$A + B \xrightarrow{k} C, \quad A + B \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C, \quad S + E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{k_2} P + E.$$

Ejercicio 7. Un oscilador mecánico simple puede ser modelado usando la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + 25x = 0$$

donde x mide el desplazamiento del equilibrio

1. Reescribir la ecuación como un sistema lineal de primer orden.
2. Esbozar un diagrama de fases para los valores $\mu = -8$, $\mu = 8$ y $\mu = 26$.
3. Describir el comportamiento dinámico en cada caso asumiendo que $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$. Graficar las soluciones en el plano tx.

Ejercicio 8. Un circuito eléctrico no lineal capacitor-resistor, puede ser modelado usando la ecuación diferencial

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + x^3 - (a_0 + x)y,$$

donde a_0 es una constante no nula y $x(t)$ representa la corriente del circuito a tiempo t. Esbozar el diagrama de fases cuando $a_0 > 0$ y cuando $a_0 < 0$. Dar una interpretación física de los resultados.

Ejercicio 9. Una población dependiente de la edad puede ser modelada por la ecuación diferencial

$$\dot{p} = \beta + p(a - bp), \qquad \dot{\beta} = \beta(c + (a - bp)),$$

donde p es la población, β es la tasa de nacimientos y $a, , b$ y c son constantes positivas. Hallar los puntos críticos del sistema y determinar el comportamiento asintótico de las soluciones.

Ejercicio 10. La potencia, P, generada por un molino de agua a velocidad V puede ser modelada por el sistema

$$\frac{dP}{dt} = -\alpha P + PV, \quad \frac{dV}{dt} = 1 - \beta V - P^2,$$

donde α y β son constantes positivas. Describir el comportamiento cualitativo del sistema cuando α y β varían y dar interpretaciones físicas de los resultados.

Ejercicio 11. Un modelo muy simple de la economía viene dado por

$$\dot{I} = I - KS, \qquad \dot{S} = I - CS - G_0,$$

donde I representa el ingreso, S la tasa de gastos, G_0 es la constante de gastos del gobierno y C, K son constantes positivas.

1. Graficar posibles soluciones cuando $C = 1$ e interpretar esas soluciones en términos económicos. ¿Qué sucede cuando $C = 1$?
2. Graficar la solución cuando $K = 4, C = 2, G_0 = 4, I(0) = 15$ y $S(0) = 5$. ¿Qué sucede con otras condiciones iniciales?

Ejercicio 12. Las ecuaciones de Lotka-Volterra adimensionales son

$$\begin{aligned}\frac{dh}{d\tau} &= \rho h(1-p),\\ \frac{dp}{d\tau} &= -\frac{1}{\rho}p(1-h),\end{aligned}$$

donde h y p representan la población escalada de presa y depredador respectivamente y ρ es un parámetro positivo.

1. Mostrar que existe una función $(h,p) \mapsto f(h,p)$ que es constante en cada trayectoria del plano (h,p).
2. Usar el resultado del ítem anterior para encontrar una función de Lyapunov definida en un entorno del punto de equilibrio $(1,1)$.

Ejercicio 13. Para desarrollar una estrategia para cosechar un recurso renovable, consideremos la ecuación

$$\dot{N} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) - H(N),$$

que es la modelo de crecimiento logístico usual con un crecimiento de la tasa de mortalidad como resultado del proceso de cosecha. $H(N)$ representa el rendimiento de la cosecha por unidad de tiempo.

1. Asumiendo que $H(N) = CN$ donde C es la tasa de captura intrínsica, encontrar la población de equilibrio N^* y determinar el rendimiento máximo.
2. Si como estrategia alternativa se considera cosechar con una rendimiento constante $H(N) = H_0$, el modelo es

$$\dot{N} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) - H_0.$$

   Determinar el punto de equilibrio estable y mostrar que cuando H_0 se aproxima a $\frac{1}{4}rK$ por abajo, existe el riesgo de que la población cosechada se extinga.

Ejercicio 14. Asumamos que el sistema

$$\dot{N}_1 = r_1N_1\left(1-\frac{N_1}{K_1}\right) - \lambda_1N_1N_2 - CN_1, \quad \dot{N}_2 = r_2N_2\left(1-\frac{N_2}{K_2}\right) - \lambda_2N_1N_2,$$

es un modelo aceptable de dos especies de peces que compiten, en el que la especie 1 está sujeta a ser cosechada. Para ciertos valores de los parámetros (en particular con $C = 0$ -sin cosecha-), este sistema tiene un equilibrio inestable con valores no nulos de ambas poblaciones. En este caso particular, ¿qué sucede cuando la tasa de cosecha C se hace positiva?

Ejercicio 15. La competencia entre dos especies por el mismo recurso se puede describir por el sistema bidimensional

$$\dot{N}_1 = N_1f_1(N_1,N_2), \qquad \dot{N}_2 = N_2f_2(N_1,N_2),$$

donde f_1 y f_2 son funciones diferenciables.

1. Mostrar que la pendiente de las nulclinas es negativa.
2. Asumiendo que existe un único punto de equilibrio no trivial (N_1^*, N_2^*), dar condiciones para que ese punto de equilibrio sea asintóticamente estable.

Ejercicio 16. El sistema de ecuaciones diferenciales usado para modelar especies que compiten por recursos es

$$x' = x(2-x-y), \qquad y' = y(\mu - y - \mu^2x),$$

donde μ es una constante. Describir el comportamiento cualitativo del sistema cuando el parámetro μ varía.

Ejercicio 17. Un sistema predador-presa puede modelarse mediante el sistema

$$x' = x(1 - y - \varepsilon x), \qquad y' = y(-1 + x - \varepsilon y),$$

donde $x(t)$ es la población de la presa e $y(t)$ la del predador a tiempo t respectivamente. Clasificar los puntos críticos para cada valor de $\varepsilon \geq 0$ y graficar los diagramas de fase para los diferentes tipos de comportamiento cualitativo. Interpretar los resultados en términos del modelo.

Ejercicio 18. En algunos experimentos realizados en dos especies de moscas de frutas, los autores testearon 10 modelos diferentes de compentencia interespecífica, incluyendo el modelo de Lotka-Volterra como un caso especial. Se encontró que el modelo que daba el mejor ajuste a los datos experimentales es

$$\dot{N}_1 = r_1 N_1 \left(1 - \left(\frac{N_1}{K_1} \right)^{\theta_1} - a_{12} \frac{N_2}{K_1} \right), \quad \dot{N}_2 = r_2 N_2 \left(1 - \left(\frac{N_2}{K_2} \right)^{\theta_2} - a_{21} \frac{N_1}{K_2} \right),$$

donde $r_1, r_2, K_1, K_2, \theta_1, \theta_2, a_{12}$ y a_{21} son constantes positivas. ¿Bajo qué condiciones este modelo presenta un punto de equilibrio no trivial asintóticamente estable?

Ejercicio 19. Dado el Hamiltoniano $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$, esbozar el diagrama de fases para el sistema Hamiltoniano asociado.

Ejercicio 20. Graficar un diagrama de fases para la ecuación del péndulo amortiguado

$$\ddot{\theta} + 0{,}15\dot{\theta} + \sin\theta = 0$$

y describir qué sucede físicamente.

Ejercicio 21. Estudiar la estabilidad del origen como punto crítico para los sistemas:

1. $x' = -y - x^3$, $y' = x - y^3$, usando la función de Lyapunov $V(x, y) = x^2 + y^2$;
2. $x' = x(x - \alpha)$, $y' = y(y - \beta)$, usando la función de Lyapunov $V(x, y) = (x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2$;
3. $x' = y$, $y' = y - x^3$, usando la función de Lyapunov $V(x, y) = ax^4 + bx^2 + cxy + dy^2$.

Ejercicio 22. Probar que el origen es el único punto crítico del sistema

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} y(1 + x) + x(1 - 4x^2 - y^2), \qquad \dot{y} = 2x(1 + x) + y(1 - 4x^2 - y^2).$$

Determinar la estabilidad del origen usando la función de Lyapunov $V(x, y) = (1 - 4x^2 - y^2)^2$.

Ejercicio 23. Consideremos el siguiente sistema bidimensional

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2),$$

que describe un oscilador armónico perturbado. Usar el teorema de Poincaré-Bendixon para demostrar la existencia de un ciclo límite.

Sugerencia: Usar coordenadas polares para mostrar que existe un conjunto invariante acotado de la forma

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < r_1 < x_1^2 + x_2^2 < r_2\},$$

que no contiene puntos de equilibrio.

Ejercicio 24. ¿Para qué valores de los parámetros el modelo de Holling-Tanner

$$\dot{x} = x\beta \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{rxy}{(a + ax)}, \qquad \dot{y} = by \left(1 - \frac{Ny}{x} \right)$$

tiene un ciclo límite?

Ejercicio 25. Graficar los diagrames de fases para el sistema de Liénard

$$\dot{x} = y - \mu(-x + x^3), \qquad \dot{y} = -x,$$

cuando $\mu = 0{,}01$ y $\mu = 10$.

Ejercicio 26. La segunda ecuación adimensional de Ludwig-Jones-Holling que modela el brote de gusanos de las yemas es

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1 + x^2},$$

donde x representa la densidad escalada de gusanos y r, k son parámetros positivos.

1. Mostrar que, dependiendo de los valores de k y r. existen o bien 2, o bien 4 puntos de equilibrio y estudiar la estabilidad de los mismos.
2. Determinar analíticamente los dominios en el espacio (k, r) donde esta ecuación posee 1 o 3 puntos de equilibrio. Mostrar que el borde entre esos dos dominios tiene una cúspide. Hallar sus coordenadas.

Ejercicio 27. Una especie de peces en grandes lagos es cosechada. La ecuación diferencial usada para modelar la población $x(t)$ en cientos de miles de habitantes es dada por

$$\frac{dx}{dt} = x\left(1 - \frac{x}{5}\right) - \frac{hx}{0{,}2 + x}.$$

Determinar y clasificar los puntos críticos y realizar un diagrama de bifurcación.

¿Cómo puede ser interpretado el modelo?

Ejercicio 28. Consideremos los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales uniparamétricos:

1. $x' = x$, $y' = \mu - y^4$;
2. $x' = x^2 - x\mu^2$, $y' = -y$;
3. $x' = -x^4 + 5\mu x^2 - 4\mu^2$, $y' = -y$.

Hallar los puntos críticos, realizar un diagrama de fases y esbozar un diagrama de bifurcación para cada caso.

Ejercicio 29. Consideremos los siguientes sistemas uniparamétricos en coordenadas polares:

1. $r' = \mu r(r + \mu)^2$, $\theta' = 1$;
2. $r' = r(\mu - r)(\mu - 2r)$, $\theta' = -1$;
3. $r' = r(\mu^2 - r2)$, $\theta' = 1$.

Graficar los diagramas de fases para $\mu < 0, \mu = 0$ y $\mu > 0$ en cada caso. Esbozar los correspondientes diagramas de bifurcación.