Geometría Proyectiva
Segundo Cuatrimestre — 2022
Práctica 5: Superficies

Primera forma fundamental

1. Calcule los coeficientes de la primera forma fundamental de las siguientes superficies paramétricas, en los puntos regulares.

(a) Elipsoide: $r(u,v) = (a\sin(u)\cos(v), b\sin(u)\sin(v), c\cos(u))$;
(b) Paraboloide elíptico: $r(u,v) = (au\cos(v), bu\sin(v), u^2)$;
(c) Paraboloide hiperbólico: $r(u,v) = (au\cosh(v), bu\sinh(v), u^2)$;
(d) Hiperboloide: $r(u,v) = (a\sinh(u)\cos(v), b\sinh(u)\sin(v), c\cosh(u))$.

2. Determine los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera unitaria S^2 en la parametrización dada por la proyección estereográfica.

3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana. Definimos el cilindro y el cono sobre α de la siguiente manera

- $Cil_\alpha(u,v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), v), \quad (u,v) \in I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$.
- $Con_\alpha(u,v) = (v\alpha_1(u), v\alpha_2(u), v), \quad (u,v) \in I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Demostrar que ambas superficies son localmente isométricas al plano (en los puntos regulares).

Sugerencia: Para el caso del cono, considerar la curva plana en $z = 1$ y luego normalizarla. Chequear que el cono obtenido es el mismo que se obtiene sin normalizar.

4. Las curvas coordenadas de una parametrización $\Phi(u,v)$ forman una *red de Tchebyshev* si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales. Demuestre que:

(a) Una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

(b) Si las curvas coordenadas de una parametrización forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar el entorno coordenado de modo que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = 1, \qquad F = \cos\theta, \qquad G = 1,$$

donde θ es el ángulo entre las curvas coordenadas.

5. Toda superficie de revolución puede ser reparametrizada de manera que los coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = E(v), \qquad F = 0, \qquad G = 1.$$

Segunda forma fundamental y curvatura de Gauss

6. Describa las regiones de S^2 cubiertas por la aplicación de Gauss de las siguientes superficies:

(a) Paraboloide de revolución: $z = x^2 + y^2$;
(b) Hiperboloide de revolución: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;
(c) Catenoide: $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$.

7. (a) Demostrar que la suma de las curvaturas normales asociadas a cualquier par de direcciones ortogonales es igual a $2H$, siendo H la curvatura media en p.

(b) Probar la siguiente identidad trigonométrica para $m > 2$:

$$1 + cos^2\left(\frac{\pi}{m}\right) + cos^2\left(\frac{2\pi}{m}\right) + \cdots + cos^2\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = \frac{m}{2}$$

(c) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ($m > 2$) son las curvaturas normales en un punto p de una superficie S en direcciones que forman ángulos de $0, 2\pi/m, \ldots, 2(m-1)\pi/m$ respectivamente con una dirección principal, entonces $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = mH$, con H.

Sugerencia: Use el teorema de Euler para (a) y (c), y use la notación de exponencial compleja para (b).

8. Encuentre expresiones para la primera y segunda forma fundamental, para la curvatura de Gauss y la media, y estudie las direcciones principales en

(a) una superficie reglada.
(b) en una superficie dada en forma implícita $f(x, y, z) = 0$.

9. Sea S una superficie regular. La indicatriz de Dupin de S en un punto p es el conjunto de vectores $w \in T_pS$ tales que $\Pi_p(w) = \pm 1$. Probar que, si p es un punto elíptico, la indicatriz de Dupin en p es una elipse. ¿Qué ocurre si p es umbílico?

10. En un punto hiperbólico, las direcciones principales bisectan las direcciones asintóticas.
Sugerencia: Analizar la indicatriz de Dupin.

11. Si una superficie S es tangente a un plano P a lo largo de una curva $C \subset S$, entonces los puntos de C son puntos planares o parabólicos de S.

12. Determine las curvas asintóticas y las líneas de curvatura de la superficie dada por $z = xy$.

13. (a) Determine una ecuación para la curva plana C que tiene la propiedad de que la longitud del segmento de la recta tangente entre el punto de tangencia y la intersección con una recta $L \subset \mathbb{R}^2$ que no corta la curva es constantemente 1. Esta curva es la *tractriz*.

(b) Por rotación de la tractriz alrededor de la recta L se obtiene una superficie S, que llamamos *pseudoesfera*. Determine si S es una superficie regular y encuentre una parametrización en un entorno de un punto regular. Muestre que la curvatura en todo tal punto es -1.

14. Sean $\phi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ y $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}$ dos funciones y supongamos que

$$r(u, v) = (\phi(v)\cos(u), \phi(v)\sin(u), \psi(v))$$

es una parametrización de una superficie de revolución con curvatura Gaussiana constante k. Supongamos además que $\phi'^2 + \psi'^2 = 1$. Muestre que

$$\phi'' + k\phi = 0.$$

Recíprocamente, muestre que para cada $k \in \mathbb{R}$ existe una superfice de revolución con curvatura de Gauss constante igual a k. ¿Cuántas hay?

15. Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = 1$ que intersecan perpendicularmente el plano xy están dadas por

$$\begin{cases} \phi(v) = C\cos v, \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2\sin^2 t}\, dt \end{cases}$$

para alguna constante C. Determine el dominio de v y haga un gráfico de la curva cortada en el plano xz cuando $C = 1$, $C > 1$ o $C < 1$. ¿Qué superficie obtenemos cuando $C = 1$?

16. Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = -1$ son de uno de los siguientes tipos:

$$\begin{cases} \phi(v) = C \cosh v, \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sinh^2 t}\, \mathrm{d}t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(v) = C \sinh v, \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \cosh^2 t}\, \mathrm{d}t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(v) = e^v, \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{2t}}\, \mathrm{d}t. \end{cases}$$

Determine el dominio de v y grafique las intersecciones de estas superficies con el plano xz.

17. Muestre que las únicas superficies de revolución con curvatura constante nula son el cilindro circular recto, el cono circular recto y el plano.

18. Consideremos la superficie obtenida por la rotación de la curva $y = x^2 - 1$ alrededor del eje x. Encontrar sus puntos elípticos, hiperbólicos, parabólicos y planares.

19. Determine los puntos umbílicos del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Geodésicas

20. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie simétrica respecto de un plano π. Probar que $S \cap \pi$ es una geodésica de S.

21. Sea $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ una curva parametrizada por longitud de arco con $x > 0$. Sea S la superficie de revolución obtenida al rotar α alrededor del eje z.

(*a*) Probar que los meridianos de S son geodésicas.

(*b*) Dar una condición necesaria y suficiente para que un paralelo de S sea geodésica.

22. Sea $\alpha \subset S$ una recta recorrida a velocidad constante. Probar que α es una geodésica.

23. Sea S una superficie. Una curva contenida en S es una *línea de curvatura* si en cada punto de la curva la dirección tangente es una dirección principal. Sea α una geodésica de S con curvatura nunca nula. Probar que α es una línea de curvatura si y solo si es una curva plana.

24. Probar que si todas las geodésicas de una superficie S son curvas planas, entonces S está contenida en un plano o en una esfera.