Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2017

Práctica N° 8: Integración Numérica - Métodos Multipaso

Ejercicio 1 Interpolando las funciones de base de Lagrange, hallar una fórmula de cuadratura por interpolación de la forma

$$\int_0^{2h} f(x)\ dx \sim A_0 f(0) + A_1 f(h).$$

Para f una función C^2 probar que el error cometido no excede el valor $\dfrac{\|f''\|_\infty}{2} h^3$.

Ejercicio 2 Usar el método de coeficientes indeterminados para dar una fórmula de cuadratura por interpolación:

$$\int_0^{3h} f(x)\ dx \sim A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(3h).$$

Ejercicio 3 Construir la fórmula abierta de Newton-Cotes para calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx$ con nodos $-1/2,\ 0,\ 1/2$, y la fórmula cerrada de Newton-Cotes con nodos en los puntos $-1,\ -1/3,\ 1/3,\ 1$.

Ejercicio 4 Considerar la función definida en $[-h, h]$ $(h > 0)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -h \leq x \leq 0 \\ x, & \text{si } \quad 0 < x \leq h. \end{cases}$$

Hallar el error de la regla de trapecios aplicada a $f(x)$. ¿El orden es igual al obtenido para una función suficientemente suave?

Ejercicio 5 La fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)\ dx \sim f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)$$

es conocida como *Regla de los Rectángulos*. Para $f \in C^1[a,b]$ acotar el error que se comete al utilizarla.

Ejercicio 6 a) Hallar una fórmula de cuadratura del tipo:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx \sim Af(-2) + Bf(0) + Cf(2).$$

b) Para $f \in C^3[-2,2]$ probar que el error cometido no excede el valor $\frac{7}{12}\|f^{(3)}\|_\infty$.

Ejercicio 7 Escribir programas que reciban una función f y los límites del intervalo $[a, b]$, y utilicen las reglas de trapecios y de Simpson para aproximar $\int_a^b f$.

Ejercicio 8 Escribir programas que reciban una función f, los límites del intervalo $[a, b]$ y un parámetro n, y utilicen las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar $\int_a^b f$, partiendo $[a, b]$ en n intervalos.

Ejercicio 9 Se desea implementar una regla de cuadratura *adaptiva*, es decir, una cuadratura compuesta que utilice más subintervalos en la zona en que la aproximación obtenida sea peor. Para ello, notamos $S(a, b)$ a la regla de Simpson en el intervalo $[a, b]$. Si notamos $c = \frac{a+b}{2}$, se tiene que:

$$\big|S(a,b) - S(a,c) - S(c,b)\big|/15 \sim E(a,c,b),$$

donde $E(a, c, b)$ es el error cometido al aplicar la regla compuesta: $S(a, c) + S(c, b)$. Implementar un programa que reciba como input una función f, un intervalo $[a, b]$ y una tolerancia ε y calcule las cuadraturas: $q = S(a, b)$, $q_1 = S(a, c)$ y $q_2 = S(c, b)$. Si $|q - q_1 - q_2| < 15\varepsilon$, se devuelve el valor $q_1 + q_2$. En caso contrario, se aplica el mismo criterio para integrar f en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, con una tolerancia $\varepsilon/2$.

Probar el programa calculando $\int_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$. Comparar los resultados (y los tiempos de ejecución) con los obtenidos por la regla de Simpson compuesta.

Ejercicio 10 Se sabe que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$.

a) Para $n = 1, \ldots, 100$, utilizar las reglas de trapecios y Simpson compuestas para aproximar numéricamente la integral y dar un valor cercano a π.

b) Graficar las sucesiones obtenidas junto con el valor de π que arroja `Octave` y el valor que se obtiene al aplicar el programa del ejercicio anterior.

Ejercicio 11 a) Calcular exactamente la integral

$$I = \int_0^{2\pi} [1 - \cos(32x)]\, dx.$$

b) Aproximar el valor de I usando el programa del Ejercicio 7 con los métodos de los trapecios, Simpson, trapecios compuesta y Simpson compuesta para $n = 2, 4, 8$ y 16.

c) Calcular el valor de I que produce el programa del ejercicio 9.

Ejercicio 12 Se quiere calcular $\int_{-1}^1 e^{-x^2}\, dx$ utilizando la regla de trapecios compuesta, partiendo el intervalo $[-1, 1]$ en n subintervalos. Hallar n de modo que el error sea menor que 10^{-3}.

Ejercicio 13 Determinar el grado de precisión de las fórmulas para $\int_{-1}^1 f(x)\, dx$:

a) $\frac{4}{3}f(-0.5) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(0.5)$.

b) $\frac{1}{4}f(-1) + \frac{3}{4}f(-\frac{1}{3}) + \frac{3}{4}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}f(1)$.

Ejercicio 14 Hallar reglas de cuadratura de grado de precisión máximo para aproximar $\int_{-3}^{3} f(x)\, dx$, de las siguientes formas:

a) $A[f(x_0) + f(x_1)]$ (repitiendo el coeficiente).

b) $Af(x_0) + Bf(x_0 + 4)$.

y determinar cuáles son dichos grados.

Ejercicio 15 Sea $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente positiva. Se tiene una fórmula de cuadratura en el intervalo $[a, b]$ de la forma:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \sim \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i). \tag{1}$$

Aplicando un cambio de variables, obtener, a partir de (1), una cuadratura para el intervalo $[c, d]$, de la forma

$$\int_c^d f(x)w(x) \sim \sum_{i=1}^{n} B_i f(y_i).$$

Calcular los coeficientes B_i en función de los A_i y los nodos y_i en función de los x_i. ¿Tiene la cuadratura en $[c, d]$ el mismo grado de precisión que la cuadratura en $[a, b]$?

Ejercicio 16 Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)x^2\, dx$ mediante una regla decuadratura de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2\, dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

Ejercicio 17

a) Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{|x|}dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado?

b) Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_0^4 f(x)\sqrt{\left|\frac{x-2}{2}\right|}dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado? Sugerencia: Usar el ejercicio 15.

Ejercicio 18 Sea w una función de peso. Se considera la regla de cuadratura de 1 punto:

$$\int_a^b f(x)w(x)\, dx \sim A_0 f(s).$$

a) Probar que, cualquiera sea w, la fórmula tiene grado de precisión máximo si $s = \dfrac{\int_a^b xw(x)\ dx}{\int_a^b w(x)\ dx}$.

b) Probar que si $w(x) \equiv 1$, esta regla coincide con la regla de los rectángulos.

c) Considerar el intervalo $[-1, 1]$ y $w(x) = (x-1)^2$. Acotar el error que produce el uso de esta regla para funciones C^1.

Ejercicio 19 Hallar los pesos y los nodos de las fórmulas de Gauss-Legendre de dos y tres puntos. (Los polinomios de Legendre mónicos de grado dos y tres son $x^2 - \frac{1}{3}$ y $x^3 - \frac{3}{5}x$).

Ejercicio 20 Probar que una fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)w(x)\ dx \sim Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

no puede tener grado de precisión mayor que $2n+1$, independientemente de la elección de los coeficientes (A_j) y de los nodos (x_j).

Sugerencia: Hallar un polinomio $p \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$ para el cual $Q_n(p) \neq \displaystyle\int_a^b p(x)w(x)\ dx$.

Ejercicio 21 Considerar la ecuación $y'(t) = f(t, y(t))$.

a) Deducir la fórmula de Milne:

$$y_n = y_{n-2} + h(\frac{1}{3}f_n + \frac{4}{3}f_{n-1} + \frac{1}{3}f_{n-2}),$$

aproximando la integral

$$\int_{t_{n-2}}^{t_n} f(t, y(t))dt = \int_{t_{n-2}}^{t_n} y'(t)dt = y(t_n) - y(t_{n-2}),$$

con la fórmula de Simpson. Usar el Ejercicio 15.

b) Proceder en forma análoga al ítem anterior y dar un método multipaso de la forma

$$y_{n+1} - y_n = h\big[Af_n + Bf_{n-1} + Cf_{n-2}\big].$$

c) Analizar la convergencia (estabilidad y consistencia) de los métodos de los ítems anteriores y calcular su orden.

Ejercicio 22 Analizar la convergencia de los siguientes métodos y calcular su orden.

a) **Adams-Bashforth.**

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n).$$

b) **Adams-Moulton.**

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(5f_{n+3} + 8f_{n+2} - f_{n+1}).$$

Ejercicio 23 Considerar el método de 2 pasos

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + ay_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_{n+1}).$$

Determinar $a, \beta_2, \beta_1, \beta_0$ de modo que el método resultante tenga orden 4.

Ejercicio 24 Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el siguiente método multipaso sea convergente:

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + (3 - a^2)y_{n+1} + (a^2 - 1)y_n = h[5f_{n+2} + (-a^2 - 5)f_n].$$