Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica N° 7: Aproximación por cuadrados mínimos.

Ejercicio 1 Escribir un programa que reciba como datos dos vectores x e y y un número n y devuelva un vector con los coeficientes del polinomio de grado n que mejor ajusta la tabla dada por x e y en el sentido de cuadrados mínimos. Para el cálculo, utilice la descomposición QR de una matriz apropiada.

Ejercicio 2 Encontrar el polinomio de grado 1 que aproxima en el sentido de cuadrados mínimos la siguiente tabla de datos:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-.1	1.1	1.9	3.2	3.8	5	6	7.3	8.1	8.9

y el polinomio de grado 2 que aproxima en el mismo sentido la siguiente tabla de datos:

x	-1	0	1	3	6
y	6.1	2.8	2.2	6	26.9

Ejercicio 3 Hallar la constante o polinomio de grado 0 que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en n puntos $x_1, \dots, x_n$ en $[a, b]$.

Ejercicio 4 El archivo *notas.csv* contiene los porcentajes de asistencia a los laboratorios de Cálculo Numérico y la nota obtenida en el final de la materia, por un grupo de alumnos. Realizar un ajuste lineal y un ajuste cuadrático de los datos. A partir de cada ajuste, ¿qué porcentaje de asistencia a los laboratorios sería recomendable alcanzar si se quiere obtener al menos un 8 en el final?

Para leer los datos del archivo, recomendamos usar el paquete `pandas`. La siguiete secuencia levanta el archivo y almacena los datos en una matriz A:

```
import pandas as pd
data = pd.read_csv("notas.csv")
A    = data.to_numpy()
```

El archivo debe estar en la misma carpeta que la notebook en donde se ejecuta el código.

Ejercicio 5 Considerar la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ en el intervalo [-1,1].

Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente f junto con

- los polinomios que aproximan a f en el sentido de cuadrados mínimos en $n+1$ puntos equiespaciados y tienen grado $\frac{2}{5}n$ y $\frac{4}{5}n$,
- el polinomio que resulta de interpolar a f en los puntos anteriores.

Ejercicio 6 El radiocarbono, o isótopo 14 del carbono (^{14}C) se crea permanentemente en la atmósfera, se incorpora a las plantas a través de la fotosíntesis y a los animales a través de las plantas que ingieren. Una vez que la planta o el animal muere, el ^{14}C decae radioactivamente siguiendo una ley exponencial decreciente. El archivo `carbono14.csv` contiene datos simulados de la cantidad de ^{14}C en una muestra de materia orgánica, desde el momento de la muerte ($t=0$). El tiempo se mide en años.

(a) Ajustar los datos con un polinomio lineal p. Graficar p junto con los datos. A partir del gráfico, decidir si el ajuste es bueno o no.

(b) Ajustar los datos con una función del tipo $f(x) = ae^{bx}$ y calcular el error $E = \sum_i (y_i - f(x_i))^2$.

(c) Graficar conjuntamente los datos y los dos ajustes.

Ejercicio 7 Sea S el subespacio de funciones continuas definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ generado por las funciones del conjunto $B = \{1, x, 2^x, 3^x\}$. Para $i = 0, 1, 2, 3$, sea $x_i = i$, y sea T un conjunto de datos del tipo $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$.

a) Demostrar que B es una base de S y que para todo conjunto de datos T existe una única función $p \in S$ tal que p interpola a T.

b) Demostrar que $\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{3} p(x_i)q(x_i)$ es un producto interno en S.

c) Aproximar la siguiente tabla de datos en el sentido de cuadrados mínimos

x	0	1	2	3
y	0.3	-0.2	7.3	23.3

con funciones del tipo: (a) $y = a2^x + b3^x$, (b) $y = a2^x + b3^x + c$.

d) Graficar los resultados obtenidos junto con los valores de la tabla de datos.

Ejercicio 8 Considerar $\operatorname{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

a) Utilizando el comando `scipy.special.erf` graficar la función en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1$.

b) Aproximar la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con polinomios de grado 1, 3 y 5, considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto con estos polinomios en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que la aproximación es mala fuera del intervalo $[-10, 10]$.

c) Se quiere aproximar nuevamente la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con una combinación lineal de funciones que compartan con erf la propiedad de ser acotada e impar. Para ello, ajustar la función erf con una función del tipo

$$c_1 x e^{-x^2} + c_2 \arctan(x) + c_3 \frac{x}{x^2+1},$$

considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto a esta aproximación en el intervalo $[-15, 15]$ y comparar con el ítem (b).

Ejercicio 9 Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim ae^{bx}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(f(x))$.

x	-1	0	1	2
y	8.1	3	1.1	0.5

Ejercicio 10 Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim -e^{ax^2+bx+c}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(-f(x))$.

x	-1	0	1	2
y	- 1.1	- 0.4	- 0.9	- 2.7

Ejercicio 11 Considerar la función signo dada por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Aproximar la función sgn en el sentido de cuadrados mínimos con funciones de la forma $a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + a_3 \cos(3x) + b_3 \sin(3x)$, considerando puntos equiespaciados en el intervalo $[-\pi, \pi]$, con paso 0.001. Graficar el resultado obtenido.

Ejercicio 12 Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcular una descomposición en valores singulares de A.

b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{Ax : \ x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

c) Calcular $\|A\|_2$ y $Cond_2(A)$.

d) Calcular A^{-1} usando la descomposición hallada.

Ejercicio 13 Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, de rango r, probar que A puede escribirse como una suma de r matrices de rango 1.

Ejercicio 14 Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, cuya descomposición en valores singulares reducida es $A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^t$. Se define la pseudo-inversa de A como $A^+ = \hat{V}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{U}^t$.

Considerar el problema de cuadrados mínimos:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2. \tag{1}$$

a) Probar que si $\mathrm{rg}(A)$ es n, entonces (1) tiene solución única x^* y que $x^* = A^+b$. (**Sug.:** Recordar que $\mathrm{Nu}(A^t) = \mathrm{Im}(A)^\perp$)

b) Si $\mathrm{rg}(A) = r < n$, entonces la solución de (1) no es única. En efecto: si x^* es solución y $\tilde{x} \in \mathrm{Nu}(A)$, entonces $x^* + \tilde{x}$ también es solución. Probar que en tal caso, $x^* = A^+b$ es la única solución de (1) en $\mathrm{Nu}(A)^\perp$.

Ejercicio 15

Verificar que A^+, la pseudoinversa de A, satisface las siguientes propiedades:

i) $AA^+A = A$ ii) $A^+AA^+ = A^+$ iii) $(AA^+)^t = AA^+$ iv) $(A^+A)^t = A^+A$

De hecho, A^+ es la única que satisface las 4 propiedades.

Ejercicio 16 Escribir un programa que reciba como datos dos vectores `x` e `y`, y una lista de funciones `S`:

$$\mathtt{S} = \{f_1, \ldots, f_n\}$$

y calcule la función $f \in < f_1, \ldots, f_n >$ que mejor aproxima a la tabla dada por `x` e `y` en el sentido de cuadrados mínimos.

Ejercicio 17 Escribir un programa que reciba como input una matriz A y un entero positivo r y:

- Calcule la descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V'$, utilizando el comando `np.linalg.svd`.
- Corrija la matriz Σ poniendo $\sigma_i = 0$, $\forall i > r$.
- Devuelva $B = U\widetilde{\Sigma}V'$, siendo $\widetilde{\Sigma}$ la matriz que resulta de corregir Σ según el ítem anterior.

Probar que la matriz B es la matriz de de rango r cuya distancia a A (en norma 2) es mínima.. Aplicar este programa a distintas matrices, con distintos valores de r.

Ejercicio 18 El programa del ejercicio anterior puede utilizarse para comprimir imágenes. En efecto, dada una imagen blanco y negro el comando `plt.imread` convierte la imagen en una matriz en la que cada casillero representa un píxel y su valor corresponde al color del píxel en escala de grises. El comando `plt.imshow` aplicado a esta matriz, muestra la imagen, mientras que el comando `plt.imwrite` permite guardar la matriz como un archivo de imagen.

Implementar un algoritmo que reciba como input un archivo de imagen y un entero positivo r, realice la compresión como en el ejercicio anterior y guarde el resultado en otro archivo. Experimentar con el valor de r, observando cuán chico puede ser r en relación con el tamaño de la matriz si se desea conservar calidad en la imagen.

La misma experiencia puede repetirse con imágenes en color. En este caso, debe tenerse en cuenta que el comando `plt.imread` devuelve un arreglo A de tamaño $m \times n \times 3$: la imagen es de $m \times n$ píxeles y $A(:,:,1)$, $A(:,:,2)$, $A(:,:,3)$ son las matrices correspondientes a su descomposición RGB (red-green-blue).

Ejercicio 19 Considerar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\ dx$$

a) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en S_m, el espacio generado por $\{x, x^2, x^3, \cdots, x^m\}$.

b) Hallar una base ortonormal para S_3.

c) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos sobre S_3 para $f(x) = x^4$.

Ejercicio 20 Sea

$$\langle f, g\rangle = f(1)g(1) - f(-1)g(-1) + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx.$$

a) Decidir si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en $C^1([-1,1])$.

b) Probar que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno para el espacio $V = \{f \in C^1([-1,1]) : f \text{ es impar}\}$.

c) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos del polinomio $p(x) = x^5$ sobre el subespacio S generado por $\{x, x^3\}$.

Ejercicio 21 a) Demostrar que

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f''(x)g''(x)dx + f(-1)g(-1) + f(1)g(1)$$

es un producto interno en el espacio $\mathcal{C}^2([-1,1])$.

b) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[X]$ para el producto interno definido en el ítem anterior.

c) Probar que si f es una función par en $\mathcal{C}^2([-1,1])$, entonces su proyección sobre $\mathbb{R}_2[X]$ es par, y que si f es una función impar, entonces su proyección es impar.

Ejercicio 22 En el conjunto de las funciones definidas en el intervalo $[-1,1]$, que son por lo menos dos veces derivables, definimos el siguiente producto

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (f''g'' + f'g')\, dx$$

a) ¿Es un producto interno en ese conjunto?.

b) Para todo $n \geq 1$, sea S_n el subespacio generado por $\{x, x^2, \ldots, x^n\}$. ¿Es un producto interno sobre S_n?.

c) Hallar una base ortonormal para S_3.

d) Hallar la proyección ortogonal de la función $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$ sobre S_3. ¿Cuál es la proyección ortogonal de la función $g(x) = 2\mathrm{sen}(\pi x) - 5x^2$ sobre S_3?