

---

# ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2022

---

## Práctica N° 5: Métodos iterativos para sistemas lineales.

**Ejercicio 1** Escribir un programa que implemente el método de Jacobi y otro que implemente el método de Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal  $Ax = b$ , con las siguientes condiciones:

- que finalice si el método se estaciona,
- que finalice con una advertencia si se excede cierto tope de iteraciones,

Sugerencia: estudiar los comandos `np.tril`, `np.triu` y `np.diag`.

**Ejercicio 2** El objetivo de este ejercicio es probar que el radio espectral de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  acota inferiormente a toda norma de  $A$ , sin utilizar normas complejas.

Dada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , sea  $\lambda = a + ib$  un autovalor de  $A$  y sea  $u + iv$  el autovector correspondiente, con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^n$ .

a) Calcular  $Au$  y  $Av$  y probar que:

$$\|Au\|_2^2 + \|Av\|_2^2 = (a^2 + b^2)(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2).$$

b) Concluir que:

$$|\lambda| \leq \|A\|_2.$$

c) Probar que dada una norma cualquiera  $\|\cdot\|$  en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  vale que

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

(Sugerencia: Usar la equivalencia de normas. Notar que si  $B = A^m$ , entonces  $\lambda^m$  es autovalor de  $B$ ).

**Ejercicio 3** Sea  $A$  una matriz que admite una base de autovectores. Mostrar una norma  $\|\cdot\|$  subordinada a una norma vectorial tal que  $\rho(A) = \|\|A\|\|$ .

**Ejercicio 4** Considerar el sistema  $Ax = b$  para  $A = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$  y  $b = (1, 2)$ .

- Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial. Verificar, sin embargo, que la matriz no es diagonal dominante.
- Sea  $J$  la matriz de iteración. Hallar las normas 1,  $\infty$  y 2 de  $J$ . Hallar una norma  $\|\cdot\|$  en la cual  $\|J\|$  sea  $< 1$ .

**Ejercicio 5** Decidir para cada uno de los siguientes sistemas, si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes. En caso afirmativo usarlos para resolver el sistema. Si ambos métodos convergen, determinar cuál converge más rápido. ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿y simétrica y definida positiva?

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 6** a) Mostrar que toda matriz  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $|\det(B)| > 1$  tiene un autovalor  $\lambda$ , real o complejo, con  $|\lambda| > 1$ .

b) Decidir si el método de Jacobi converge o no para un sistema dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 7** Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} B^n = 0$  si y sólo si  $|b| < \sqrt{2}/2$ .

b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre  $a, c \in \mathbb{R}$  para la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel aplicados a la resolución de  $Ax = v$ .

**Ejercicio 8** a) Probar que si  $A$  tiene una base de autovectores  $v_i$ , con autovalores  $\lambda_i$ , la matriz

$$B = I + sA, \quad s \in \mathbb{R}$$

tiene los mismos autovectores, con autovalores  $\nu_i = 1 + s\lambda_i$ .

b) Se sabe que los autovalores de la matriz  $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

son  $\lambda_j = -4 \sin^2(\frac{\pi j}{2n})$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ . Considerar sistemas de la forma  $Ax = b$ , con  $A$  como en el Ejercicio anterior. Decidir si el método de Jacobi converge. ¿Qué sucede con el método de Gauss-Seidel? ¿Cuál resulta preferible?

c) Considerar el problema de Poisson en el intervalo  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Formular el problema por diferencias finitas (esto es usando la discretización habitual de la derivada segunda). Decidir si los métodos de Jacobi o Gauss-Seidel pueden aplicarse para resolver el sistema lineal resultante.

**Ejercicio 9** a) Sean  $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , con  $M$  invertible. Probar que los autovalores de  $-M^{-1}N$  son las raíces del polinomio  $\det(\lambda M + N)$

b) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 + \frac{1}{\alpha} \\ 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 1 + \frac{1}{\alpha} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para resolver un sistema  $Ax = b$  se propone el método iterativo:

$$x_{n+1} = -M^{-1}Nx_n + M^{-1}b, \quad (1)$$

Siendo  $N = A - M$ . Probar que si el método (1) converge a  $x$ , entonces  $x$  es solución del sistema  $Ax = b$ .

c) Hallar todos los valores de  $\alpha$  para los cuáles el método propuesto converge.

d) ¿Qué restricción deberá imponerse sobre  $\alpha$  si se quiere garantizar que el error  $e_n = x_n - x$  satisfaga:

$$\|e_n\| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \|e_0\|,$$

para alguna norma  $\|\cdot\|$ ?

**Ejercicio 10** Utilizar la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema  $A_n x = b_n$  para

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \quad y \quad b_n = \left(1, 2 - \frac{1}{n^2}\right).$$

¿Cómo es la convergencia? ¿Tiene esto que ver con el mal condicionamiento de  $A$ ? Dar un ejemplo de una matriz mal condicionada para la cual la convergencia sea rápida.

**Ejercicio 11** (método SOR) Dada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $a_{ii} \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $A = L + D + U$  con  $L =$  triangulo inferior estricto de  $A$ ,  $D = \text{diag}(A)$  y  $U =$  triangulo superior estricto de  $A$ .

1. Demostrar que el sistema  $Ax = b$  es equivalente al sistema  $(D + wL)x = ((1 - w)D - wU)x + wb$ , cualquiera sea  $w \neq 0$ .
2. Considere el método iterativo  $x^{k+1} = B(w)x^k + c$  con  $B(w) = (D + wL)^{-1}((1 - w)D - wU)$ . Probar que  $\det(B(w)) = (1 - w)^n$  y concluir que: Si el método converge  $\Rightarrow w \in (0, 2)$
3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Compare los métodos para  $w = \frac{3}{2}$  y  $w = 1$  ¿Cuál elegiría y por qué?