Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica N° 4: Número de condición. Sistemas Lineales.

Ejercicio 1 Probar que para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

a)

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

b)

$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Ejercicio 2 Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ y entre las normas $\|.\|_2$ y $\|.\|_\infty$ vienen dadas por:

- Vectorial

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

- Matricial

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$$

- Calcular los coeficientes para la equivalencia vectorial y matricial entre las normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_\infty$

Ejercicio 3 Se quiere estimar la norma 2 de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ como el máximo del valor $\|Ax\|_2/\|x\|_2$ entre varios vectores $x \in \mathbb{R}^3$ no nulos generados al azar. Hacer un programa que reciba una matriz A y luego

- genere los primeros 100 términos de la siguiente sucesión:

$$s_1 = 0, \quad s_{k+1} = \max\left\{s_k, \frac{\|Ax_k\|_2}{\|x_k\|_2}\right\}$$

  donde los $x_k \in \mathbb{R}^3$ son vectores no nulos generados al azar con coordenadas en el intervalo $[-1, 1]$.

- grafique la sucesión calculada, junto con el valor exacto de la norma de la matriz.

Recordar que la norma de un vector o matriz `x` se calculan en Python con el comando `np.linalg.norm(x,2))`. Para generar vectores al azar puede usarse la función `np.random.random()`. Tener en cuenta esto genera valores en el intervalo $[0,1]$. Chequear, además que estos vectores generados resulten no nulos.

Ejercicio 4 Se tiene el sistema $Ax = b$.

a) Sea x la solución exacta y $\tilde{x}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama *residuo* al vector $r := b - A\tilde{x}$. Si notamos $e = x - \tilde{x}$, mostrar que:

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

b) En lugar del dato exacto b se conoce una aproximación $\tilde{b}$. $\tilde{x}$ es tal que $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Probar que:

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

Ejercicio 5 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $cond_2(A)$ y $cond_\infty(A)$.

b) ¿Cuán chico debe ser el error en los datos $(b - \tilde{b})$, si se desea que el error en la aproximación de la solución sea menor que 10^{-4}?

c) Realizar experimentos numéricos para verificar las estimaciones del ítem anterior. Considerar $b = (3,2,2)^t$, que se corresponde con la solución exacta $x = (1,1,1)^t$. Generar vectores de error aleatorios, normalizarlos para que su norma sea tan chica como la estimada en el item anterior y perturbar b obteniendo $\tilde{b}$. Finalmente, resolver $A\tilde{x} = \tilde{b}$ y verificar que $\|\tilde{x} - x\| < 10^{-4}$.

Ejercicio 6 Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $\| \ \|$ es una norma matricial, la condición de A verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{cond(A)} \leq \text{ínf}\left\{\frac{\|A-B\|}{\|A\|} : B \text{ es singular}\right\}.$$

Deducir que

$$cond(A) \geq \sup\left\{\frac{\|A\|}{\|A-B\|} : B \text{ es singular}\right\}.$$

Nota: En ambos casos, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que $cond(A)$ mide la distancia relativa de A a la matriz singular más próxima.

Ejercicio 7 a) Estimar la $cond_\infty(A)$ de las siguientes matrices en función ε (cuando $\varepsilon \to 0$).

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 2 & 3 & 4 \\ 1-\varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Concluir que la condición de las matrices A y B del ítem anterior tienden a infinito, cualquiera sea la norma considerada.

Ejercicio 8 Sea D_n la matriz diagonal de $n \times n$ con elementos diagonales iguales a $1/10$. Calcular el determinante de D_n y ver que $det(D_n) \to 0$ si $n \to \infty$. ¿D_n está mal condicionada?

Ejercicio 9 Sea $A_n \in \mathbb{R}^n$ la matriz dada por $A_n = (a_{i,j})$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ 1/i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que $Cond_\infty(A_n) \geq Cn^2$ para alguna constante C independiente de n.

b) Probar que $Cond_2(A_n) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Ejercicio 10 La n-ésima matriz de Hilbert $H_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se define de la siguiente manera

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}.$$

Demostrar que $cond_\infty(H_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 11 a) Escribir un programa en `python` que resuelva un sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ usando eliminación gaussiana sin pivoteo.

b) Adaptar el programa del ítem anterior para que calcule la matriz A^{-1}.

Ejercicio 12 Se quiere calcular la solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10^{-3}x + 2y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo, con aritmética de punto flotante de 3 dígitos y sistema de redondeo.

a) Analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real.

b) Repetir el método de eliminación gaussiana eligiendo el pivote más conveniente.

Ejercicio 13 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tridiagonal.

a) Mostrar que el proceso de eliminación gaussiana preserva los ceros de A, es decir que a lo largo de la triangulación no se generan valores no nulos fuera de las tres diagonales principales.

b) Adaptar el programa del Ejercicio 11 para que resuelva un sistema $Ax = b$, con A tridiagonal. El programa debe recibir cuatro vectores (las tres diagonales principales y b), y devolver x. Utilizar la función `time` del módulo `time` de `python` para conocer el tiempo que se tarda en resolver un sistema con este programa y comparar con el que se requiere para resolver el mismo sistema utilizando las funciones `np.linalg.inv()` y `np.linalg.solve(,)`.

c) Experimentar con ejemplos de la Práctica 3 cuya formulación conduzca a matrices tridiagonales.

Ejercicio 14 Considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

Ejercicio 15 Sea $v \in \mathbb{C}^n$. Probar que la matriz $I - vv^*$ es unitaria si y sólo si $\|v\|_2^2 = 2$ o $v = 0$.

Ejercicio 16 Dados $x \neq y$ en $\mathbb{C}^n$ tal que $\|x\|_2 = \|y\|_2$ y $\langle x, y\rangle$ es real. Probar que la matriz unitaria $U = I - vv^*$ con $v = \dfrac{\sqrt{2}}{\|x-y\|_2}(x-y)$ satisface que $Ux = y$.

Ejercicio 17 Implementar dos programas que calculen la descomposición QR de una matriz:

1. Aplicando de manera directa el método de ortonormalización de Gramm-Schmidt.

2. Utilizando transformaciones de Householder.

Generar algunas matrices aleatorias y comparar las descomposiciones arrojadas por estos programa con las dadas por el comando `np.linalg.qr`. ¿Qué se observa?

Ejercicio 18 Hallar la factorización QR de las siguientes matrices

$$a)\, A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad b)\, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 19 **Método QR:** El *método QR* utiliza la descomposición QR para calcular autovalores. Consiste en, dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, generar una sucesión de matrices A_k definida del siguiente modo:

$$A_1 = A, \quad Q_k R_k \text{ descomposición QR de } A_k \text{ y } A_{k+1} = R_k Q_k.$$

a) Probar que todas las matrices A_k tienen los mismos autovalores.

b) Implementar un programa que genere los pimeros m términos de la sucesión del ítem anterior.

c) Aplicar el programa para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 190 & 66 & -84 & 30 \\ 66 & 303 & 42 & -36 \\ 336 & -168 & 147 & -112 \\ 30 & -36 & 28 & 291 \end{pmatrix},$$

calcular A_m con $m = 30, 50, 100$. Observar que los dos primeros elementos de la diagonal de A_m aproximan a los autovalores reales de A y que los autovalores de la submatriz $A_m(3:4, 3:4)$ aproximan a los autovalores complejos de A.