

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica N° 3: Ecuaciones Diferenciales: Problemas de valores de contorno.

Ejercicio 1 Hallar el error local de las siguientes discretizaciones de la derivada primera indicando en cada caso las hipótesis de suavidad que requiere de la función u :

- a) $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ (diferencia *forward*)
- b) $u'(x) \sim \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$ (diferencia *backward*)
- c) $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$ (diferencias centradas)
- d) $u'(x) \sim -\frac{1}{h}(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h))$

Ejercicio 2 Hallar el error local para la discretización habitual de la derivada segunda, y explicitar sus requerimientos de suavidad:

$$f''(x) \sim \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Ejercicio 3 Se tiene una masa sujeta a un resorte. Suponiendo que no existe rozamiento, la posición $y(t)$ de la masa a tiempo t está regida por la ecuación:

$$m\ddot{y} = -ky,$$

donde m es la masa y k la constante del resorte.

Supongamos que la masa se encuentra en movimiento y que se registra que su posición a tiempo 0 es $y(0) = 0$, mientras que a cierto tiempo t_f , es $y(t_f) = y_f$.

- a) Discretizar el intervalo $[0, t_f]$ con paso h . Utilizando la discretización usual para la derivada segunda y teniendo en cuenta las condiciones de contorno, discretizar el problema, formulándolo como un sistema lineal.
- b) Hacer un programa que reciba como input la masa m , la constante k y el paso h , construya la matriz del sistema, lo resuelva, y grafique la solución.
- c) Resolver para $t_f = 10$, con los siguientes datos:
 - $y_f = 1, m = \frac{1}{4}, k = \frac{1}{2}$.
 - $y_f = 1, m = 0.025, k = \frac{1}{2}$.
 - $y_f = 1, m = \frac{1}{4}, k = 0.05$.
 - $y_f = 1, m = 0.025, k = 0.05$.

Observar el efecto que producen las modificaciones en los distintos parámetros.

Ejercicio 4 Si al problema anterior se le agrega rozamiento y un forzante se obtiene una ecuación de la forma:

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y} + f,$$

donde b es el coeficiente de rozamiento y $f = f(t)$ el forzante.

- a) Escribir el sistema discretizado que corresponde a utilizar la discretización usual de la derivada segunda y diferencias centradas para la derivada primera.
- b) Repetir usando diferencias forward para la derivada primera.
- c) Modificar el programa del ejercicio anterior para incorporar los nuevos términos de la ecuación utilizando diferencias centradas o forward para la derivada primera.
- d) Para $f = 0$ proponer soluciones de la forma $y(t) = Ae^{\lambda t}$. Hallar valores de λ en función de los parámetros m , k y b . Estudiar el comportamiento de la solución de acuerdo a la naturaleza de los valores de λ hallados.
- e) Resolver tomando $y_0 = 1$, $t_f = 10$, $y_f = 0$, con distintas combinaciones de los parámetros:
 - $m = 0.25$, $m = 0.025$.
 - $k = 0.5$, $k = 0.05$.
 - $b = 5 \times 10^{-3}$, $b = 0.05$, $b = 0.1$.

Analizar si los resultados obtenidos son cualitativamente consistentes con lo esperado.

Ejercicio 5 Calcular el error de truncado de las discretizaciones usadas en el ejercicio anterior, tanto para diferencias centradas como para forward. ¿Cuál parece preferible?

Ejercicio 6 Considerar el problema del calor estacionario en el intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{cases} -\alpha u''(x) = f(x), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

donde u representa la distribución de temperatura generada por una fuente f y $\alpha > 0$ es el coeficiente de difusividad térmica.

- (a) Formular el problema de forma matricial.
- (b) Estudiar el error de truncado.
- (c) Resolver y graficar la solución para distintos valores de α .

Ejercicio 7 Considerar el problema de evolución para la ecuación del calor, dado por la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \alpha u_{xx}(x, t) & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x) & x \in [0, 1] \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & t > 0, \end{aligned}$$

donde tomamos $\alpha = 1$.

- (a) Discretizar el problema usando un esquema explícito con paso h en x y paso Δt en t .
- (b) Calcular el error de truncado del método. ¿Existe algún valor de $r = \frac{\Delta t}{x^2}$ tal que el error de truncado sea mejor?
- (c) Hallar condiciones sobre r que garanticen la estabilidad del método en norma infinito.
- (d) Probar que el error de discretización $e_j^n = U(x_j, t_n) - u_j^n$ es solución de la ecuación en diferencias:

$$e_j^{n+1} = r e_{j-1}^n + (1 - 2r) e_j^n + r e_{j+1}^n + kT(x_j, t_n)$$

donde $T(x_j, t_n)$ es el error de truncado en (x_j, t_n) .

- (e) Probar que si se satisfacen las condiciones de estabilidad el método resulta convergente.

Ejercicio 8 Para el problema del ejercicio anterior:

- (a) Implementar un programa que reciba como input los pasos h y Δt , el coeficiente α , el dato inicial g y un tiempo final t_f y resuelva el problema.
- (b) Graficar la solución u con dominio en el plano $[0, 1] \times [0, t_f]$. ¿Qué se observa cuando se resuelve utilizando un valor de r que no satisface la condición de estabilidad?
- (c) Graficar la solución en el intervalo $[0, 1]$, para cada instante de tiempo. Para lograr ver una *película* con la evolución del sistema puede completarse la siguiente secuencia:

```

fig , ax = plt.subplots()
dibujos = [] #grafica y guarda el dibujo en una
variable
for i in range(1, N+1) :
    ax.remove(dibujos[-1]) #elimina el dibujo anterior
    dibujos.append(ax.plot(...)) #grafica el siguiente paso

```

Ejercicio 9 Modificar el programa del Ejercicio 8 para que resuelva la ecuación $u_t(x, t) = \alpha u_{xx}(x, t) + f(x, t)$, donde f es una fuente. Resolver tomando $g(x) \equiv 0$, para alguna f . Por ejemplo, pueden tomarse:

- $f(x, t) = x(1 - x)$
- $f(x, t) = \xi_{[41,34]}(x)$
- $f(x, t) = \xi_{[14,34]}(x) \sin(t)$
- $f(x, t) = \xi_{[18,38]}(x) \xi_{[2i,2i+1]}(t) + \xi_{[58,78]}(x) \xi_{[2i+1,2i+2]}(t)$, tomando $i = 0, \dots, I - 1, t_f = 2I$. Para las f independientes de t , comparar la solución a tiempo t_f con la obtenida al resolver el problema estacionario del Ejercicio 6.

Ejercicio 10 Considerar la ecuación $u_t = \alpha u_{xx}$ con condiciones de Dirichlet homogéneas y con $\alpha > 0$. Para el método implícito de primer orden:

$$u_{j+1}^{n+1} - u_j^n = r\alpha(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}).$$

- (a) Estudiar la estabilidad en norma infinito.
- (b) Probar que el error de truncado es $O(\Delta t) + O(h^2)$.