Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Segundo Parcial

Primer cuatrimestre de 2017 (10/7/2017)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Considerar la función $f(x) = cos(\pi x)$.

   a) Calcular el polinomio p tal que $p(-1) = f(-1)$, $p'(-1) = f'(-1)$, $p(0) = f(0)$, $p(1) = f(1)$ y $p'(1) = f'(1)$.

   b) Probar que $|f(x) - p(x)| \leq \frac{\pi^5}{120}$ para todo $x \in [-1, 1]$.

2. Considerar, en $C^1([0, 1])$ el producto interno:

$$\langle g, h \rangle = \int_0^1 g'(x)h'(x)dx + g(0)h(0)$$

   a) Hallar una base ortonormal del subespacio de $C^1([0, 1])$ formado por los polinomios de grado menor o igual que 2.

   b) Hallar el polinomio de grado menor o igual que dos que mejor aproxima a la función $f(x) = x^3 - 3$ en el sentido de cuadrados mínimos, con el producto interno dado.

3. Consideramos la cuadratura:

$$Q(f) = \frac{2}{3} f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

   para aproximar $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)(1 - x^2)dx$.

   a) Calcular su orden de precisión y decidir si se trata de una cuadratura gaussiana.

   b) Probar que, para una $f \in C^4([-1, 1])$ vale que:

$$|I(f) - Q(f)| \leq \frac{\|f^{(iv)}\|_\infty}{6}.$$

   c) Dar la cuadratura gaussiana de dos nodos para aproximar $\int_0^1 f(y)(y - y^2)dy$.

4. Se tiene una ecuación diferencial de la forma $y' = f(t, y)$, para $t \in [0, T_f]$. Fijado un parámetro h, se construye una grilla $t_i = ih$, $0 \leq i \leq N$, $T_f = Nh$.

   a) Se propone una cuadratura de la forma:

$$\int_{t_n}^{t_{n+3}} f(\xi)d\xi \sim A_0 f(t_{n+1}) + A_1 f(t_{n+2}).$$

   Hallar A_0 y A_1 de modo que la cuadratura tenga grado de precisión al menos 1. Deducir un método explícito de tres pasos a partir de esta cuadratura.

   b) Probar que el error de truncado del método obtenido es $O(h^2)$.

5. La función $f(x) = (2 - e^{-x})^2 - 3$ tiene dos raíces: una negativa r_1, y una positiva r_2.

   a) Probar que $r_1 \in (-2, -1)$ y $r_2 \in (1, 2)$.

   b) Probar que para todo dato inicial $x_0 \leq -2$ el método de Newton Raphson genera una sucesión creciente que converge a r_1.

   c) Sin hacer cuentas: ¿qué se espera que ocurra si se toma un dato inicial x_0 suficientemente grande?