Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Primer Parcial

Primer cuatrimestre de 2017 (18/5/2017)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Considerar el sistema:
$$\begin{cases} 0{,}26x & + & 0{,}187y & = & 0{,}0723 \\ 0{,}152x & + & 0{,}11y & = & 0{,}0423. \end{cases}$$

   a) Resolverlo utilizando un sistema de punto flotante en base 10, con 3 dígitos de mantisa.

   b) ¿Qué ocurre si se pretende utilizar una mantisa de 2 dígitos?

2. Considerar el problema: $\begin{cases} y'(t) & = & t^2 \sin(y(t)^2) \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$

   a) Probar que para $t \in [0,1]$ se tiene que $y(t) \in [0,2]$.

   b) Escribir la iteración del método de Euler para la ecuación planteada y estimar el error de truncado para $t \in [0,1]$.

   c) Hallar h de manera que el error de aproximación para $y(1)$ tenga dos dígitos significativos.

3. Considerar el problema: $-u''(x) + u(x) = x - 3$, con condiciones de contorno $u(0) = 2$ y $u(1) = 0$.

   a) Proponer un esquema para resolver por diferencias finitas.

   b) Calcular el error de truncado del esquema propuesto.

   c) Escribir el problema discreto de manera matricial.

4. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se desea resolver un sistema $Ax = b$. Para ello, se toma una descomposición de A, $A = ST$, y se resuelven sucesivamente los sistemas: $Sy = b$, $Tx = y$. El dato b no es conocido de manera exacta, sino que se tiene una aproximación $\tilde{b}$, lo que conduce a una solución $\tilde{x}$.

   a) Probar que la resolución a través de la descomposición ST admite la cota para el error relativo:
$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{Cond}(S)\mathrm{Cond}(T)\frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}.$$

   b) Considerar $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, y tomar S y T dados por la descomposición LU de A. ¿Cómo queda la cota del error relativo (en norma infinito)?

   c) Repetir las cuentas para la descomposición QR, ¿Cuál parece preferible?

5. Se desea resolver un sistema de la forma $Ax = b$ donde: $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

   a) ¿Puede utilizarse el método de Jacobi? ¿Y el de Gauss-Seidel?

   b) Se propone el método iterativo:
$$x_{x+1} = (I - A)x_n + b \tag{1}$$
   Probar que si la sucesión $(x_n)_n$ generada por (1) converge a un cierto valor x^*, entonces x^* es solución de $Ax = b$.

   c) Probar que el método (1) aplicado a A converge.