Análisis Complejo - Primer cuatrimestre de 2021

Práctica N°9. Automorfismos y Teorema de la aplicación conforme

1. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfa. Probar que si existen dos números complejos distintos a y b tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces $f(z) = z$ para todo z en $B(0,1)$.

   Sugerencia: Considerar la función
   $$g(z) = \frac{h(z) - a}{1 - \overline{a}h(z)}, \quad \text{con} \quad h(z) = f\left(\frac{z + a}{1 + \overline{a}z}\right)$$
   y usar el Lema de Schwarz.

2. Sean $f, g : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfas y biyectivas. Probar que si f y g coinciden en dos puntos distintos de $B(0,1)$, entonces $f(z) = g(z)$ para todo z en $B(0,1)$.

3. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0,1) \to B(1,4)$ que verifican simultáneamente $f(0) = 3$ y $f(\frac{1}{2}) = 1$.

4. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $|f'(0)| = 1$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda z$ para todo z en $B(0,1)$.

5. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0,1) \to B(0,2)$ que verifican simultáneamente $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{3}{2}$.

6. (a) Sea f un automorfismo de $B(0,1)$ tal que $f(0) = 0$. Probar que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta}z$ para todo z en $B(0,1)$.

   (b) Probar que $f : B(0,1) \to B(0,1)$ es automorfismo si y sólo si existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in B(0,1)$ tales que para todo z en $B(0,1)$,
   $$f(z) = e^{i\theta}\frac{z - \alpha}{\overline{\alpha}z - 1}.$$

7. (a) Sea $\mathbb{P}$ el semiplano superior (también llamado el semiplano de Poincaré). Es decir, $\mathbb{P} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$. Probar que $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ es automorfismo si y sólo si existen a, b, c y $d \in \mathbb{R}$ con $ad - bc > 0$ tales que para todo z en $\mathbb{P}$,
   $$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

   (b) ¿Cuáles son los automorfismos del semiplano inferior?

8. Caracterizar todos los automorfismos de $\mathbb{L} = \{\mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

9. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a - b$ sea un múltiplo racional de π. Dar explícitamente un biholomorfismo ϕ que mande el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : a < Arg(z) < b\}$ en el disco unidad.

10. Caracterizar todos los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. (Sugerencia: recordar el ejercicio 12 de la práctica 7.)

11. Sean Ω un abierto simplemente conexo del plano, f y g dos automorfismos de Ω y a y b dos puntos distintos de Ω. Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, probar que $f(z) = g(z)$ para todo z en Ω.

12. Caracterizar todos los automorfismos de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Sugerencia: estudiar el desarrollo de Laurent en 0 de un tal automorfismo.)