Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Complejo- Primer Cuatrimestre de 2020

Práctica N°6. Funciones Analíticas

1. (a) Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} exp(-1/x^2) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

   Probar que f es C^∞. ¿Puede expresarse en algún entorno de $x = 0$ mediante una serie de potencias?

   (b) Si definimos ahora otra función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la variable compleja z cambiando x por z en la fórmula de i) ¿se obtiene una función holomorfa en $z = 0$?

2. Sea f entera y R un número real positivo tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo z tal que $|z| > R$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

3. (a) Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, $f \not\equiv 0$. Probar que para cada $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$ tales que $f(z) = (z-a)^n g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

   (b) Con las hipótesis del ítem anterior, verificar que el conjunto de ceros de f es discreto. Deducir que en todo compacto de Ω, f tiene sólo un número finito de ceros.

4. (a) ¿Existe f holomorfa en $B(0,1)$ tal que $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

   (b) ¿Existe f holomorfa en $B(0,1)$ tal que $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3-2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}, n > 1$?

5. Hallar todas las funciones enteras tales que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)^3 + f\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, conexo y simétrico con respecto a $\mathbb{R}$ tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$ vale que $f(z) \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $z \in \Omega$ vale que

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

7. Sea $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. Verificar que los ceros de f son los puntos de la forma $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$ con n impar, que f es holomorfa en $B(0,1)$ y el conjuntos de ceros de f tienen un punto de acumulación. ¿Es $f(z) = 0$ para todo $z \in B(0,1)$? ¿Contradice esto algún resultado conocido?

8. Sean Ω un conjunto abierto y conexo del plano complejo. Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas que no se anulan en Ω. Si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ de puntos de Ω tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \Omega$, $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

probar que existe una constante c tal que $f(z) = cg(z)$ en Ω.

9. Sea f entera con la siguiente propiedad:

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ existe } n(z) \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^{(n(z))}(z) = 0.$$

   Probar que f es un polinomio.

10. Demostrar que si Ω es un conjunto abierto y conexo del plano complejo, f y g son holomorfas en Ω y $\overline{f}g$ es holomorfa en Ω, entonces $g \equiv 0$ o f es constante.