

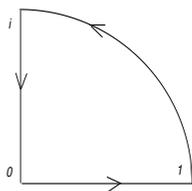
ANÁLISIS COMPLEJO - SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2019

Práctica N°4. Integración.

1. Calcular

i) $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$,

ii) $\int_{\gamma} |z|^2 z dz$ para la siguiente curva γ :



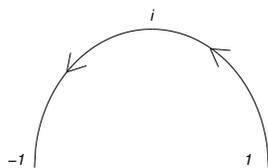
2. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva. Denotamos por $-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ a la curva dada por $-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$. Probar que

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

3. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ y sea $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = az + b$. Dadas una curva γ y $z_0 \notin \gamma$, probar que

$$\int_{T \circ \gamma} \frac{dz}{z - T(z_0)} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

4. Sea γ la curva:



Demostrar que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} dz \right| \leq \pi \frac{1 + e}{2}.$$

5. Sea $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma_r(t) = re^{it}$. Probar que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

6. Sea γ como en el ejercicio 4. Calcular $\int_{\gamma} \cos(z) dz$.

7. Sean $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_1 - z_0| \neq r$ y $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

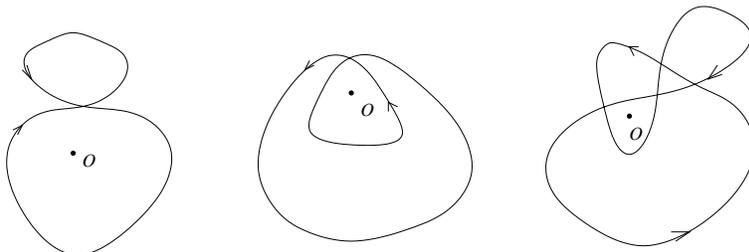
i) Calcular $\int_{\gamma} (z - z_1)^n dz$ si n es un entero distinto de -1.

ii) Probar que si $|z_1 - z_0| < r$, entonces $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_1} = 2\pi i$.

iii) Probar que si $|z_1 - z_0| > r$, entonces $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_1} = 0$.

8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Demostrar que si $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ en una curva $\gamma \subseteq \Omega$ entonces $\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz$.

9. Evaluar $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz$ siendo γ cada una de las siguientes curvas:



10. Encontrar todos los posibles valores de $\int_{\gamma} \frac{dz}{1 + z^2}$, donde γ es una curva diferenciable simple cerrada que no pasa por $\pm i$.

11. Sea γ la curva cuya imagen es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parametrizada por $\gamma(t) = a \cos t + i b \sin t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.

Calcular $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ y deducir que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

12. Sea γ una curva cerrada y $w \in \mathbb{C}$ tal que $w \notin \gamma$. Denotamos por $\eta(\gamma, w)$ al índice de la curva γ con respecto a w . Probar:

i) $\eta(\gamma, w) = -\eta(-\gamma, w)$ donde $-\gamma$ se define como en el ejercicio 2.

ii) $\eta(\gamma, w) = 0$ para todo $w \notin \{z : |z| \leq \max|\gamma|\}$.

iii) $\eta(\gamma, w)$ es continua.

iv) $\eta(\gamma, w)$ es constante como función de w en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

13. Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Sea $\varphi : \gamma \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw$.

Probar que:

(a) g es continua.

(b) Si para todo $w \in \gamma$, la función $\varphi(w, -) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y además $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(w, z)$ resulta continua en w y z , entonces g es holomorfa y

$$g'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(w, z) dw.$$

14. (a) Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua.

Definimos $\varphi : \gamma \times (\mathbb{C} \setminus \gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ por $\varphi(w, z) = \frac{f(w)}{w - z}$ y $g : \mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(z) = \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw$. Probar que g es holomorfa y

$$g^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw.$$

(b) Deducir que si γ es cerrada y f es holomorfa, entonces se tiene que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw.$$

15. Calcular:

i) $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z - 2} dz$, $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 4e^{it}$,

ii) $\int_{\gamma} \frac{z}{z + 1} dz$, $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{ikt}$ ($k \in \mathbb{Z}$),

iii) $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} dz$, $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$,

iv) $\int_{\gamma} \frac{\log(1 + z)}{(z - \frac{1}{2})^3} dz$, $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = \frac{2}{3}e^{it}$,

v) $\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2 - 1)^2} dz$, $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{ikt}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

16. Probar que $f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt^2} dt$ es una función holomorfa en $\operatorname{Re}(z) > 0$.

17. Probar que si $f(z)$ es continua en el disco cerrado $|z| \leq r$ y holomorfa en el disco abierto $|z| < r$, se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

para todo $|z| < r$.