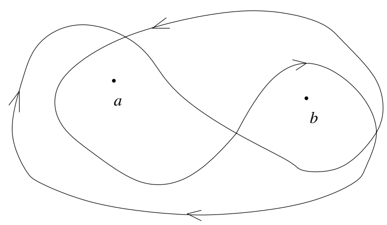
Análisis Complejo– Primer Cuatrimestre de 2021

Práctica 4. Dominios simplemente conexos. Desigualdad de Cauchy

1. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$, y sea γ la curva en la siguiente figura:



   i) Mostrar que $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$.
   ii) *Convencerse* de que γ no es homotópica a cero en Ω.

2. Probar que si Ω es simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω. ¿Es necesaria la hipótesis de simplemente conexo?

3. (a) Sea Ω un abierto simplemente conexo y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $e^{w_0} = f(z_0)$. Demostrar que existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$ y $g(z_0) = w_0$. (Sugerencia: tomar g tal que $g' = \frac{f'}{f}$ y mostrar que $h = e^{-g} f$ es constante.)
   (b) Demostrar que tal g es única.
   (c) Decidir si en las condiciones del ítem (a), vale que para todos $z_1, z_2 \in \Omega$, $f(z_1) = f(z_2) \Longrightarrow g(z_1) = g(z_2)$.
   (d) ¿Es necesaria la hipótesis de "simplemente conexo" en el ítem (a)?

4. Sean f y g dos funciones enteras. Probar que $f^2(z) + g^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si existe una función entera h tal que $f(z) = \cos(h(z))$ y $g(z) = \operatorname{sen}(h(z))$. (Sugerencia: notar que $1 = (f + ig)(f - ig)$, luego $(f + ig)(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.)

Desigualdad de Cauchy

5. Hallar todas las funciones enteras tales que $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = 5$.

6. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función armónica no sobreyectiva.
   (a) Probar que u está acotada superior o inferiormente.
   (b) Probar que u es constante.

   Concluir que toda función armónica es constante o sobreyectiva.

7. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera y z_0 y z_1 dos números complejos $\mathbb{R}$-linealmente independientes tales que $f(z + z_0) = f(z)$ y $f(z + z_1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es constante.

8. Sea f una función entera tal que $f(0) = \frac{1}{2}$ y $|f(z)| \leq |e^z - \frac{1}{2}|$ para todo z en $\mathbb{C}$. Probar que $f(z) = e^z - \frac{1}{2}$ para todo z en $\mathbb{C}$.

9. Sean C un cuadrado en $\mathbb{C}$ y f una función continua en C y holomorfa en el interior de C. Probar que si f se anula en uno de los lados de C, entonces f es constante.

10. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua, holomorfa en Ω y no constante tal que $|f(z)|$ es constante para todo $z \in \partial\overline{\Omega}$. Probar que existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = 0$.

11. Formular y demostrar el "principio de módulo mínimo" para funciones holomorfas.