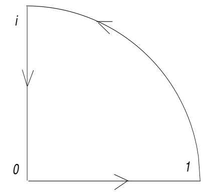
Análisis Complejo - Primer Cuatrimestre de 2021

Práctica N°3. Integración.

1. Calcular

   i) $\int_\gamma \overline{z}dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$,

   ii) $\int_\gamma |z|^2 z dz$ para la siguiente curva γ:



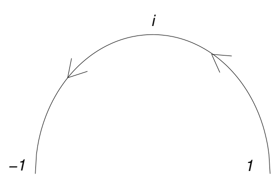
2. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva. Denotamos por $-\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ a la curva dada por $-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$. Probar que

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

3. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ y sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(z) = az + b$. Dadas una curva γ y $z_0 \notin \gamma$, probar que

$$\int_{T\circ\gamma} \frac{dz}{z - T(z_0)} = \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

4. Sea γ la curva:



   Demostrar que

$$\Big| \int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} dz \Big| \leq \pi \frac{1 + e}{2}.$$

5. Sea $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_r(t) = re^{it}$. Probar que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

6. Sea γ como en el ejercicio 4. Calcular $\int_\gamma \cos(z)\, dz$.

7. Sean $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_1 - z_0| \neq r$ y $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

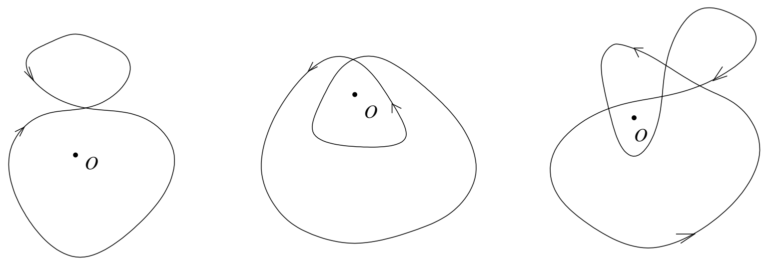
   i) Calcular $\int_\gamma (z - z_1)^n\, dz$ si n es un entero distinto de -1.

   ii) Probar que si $|z_1 - z_0| < r$, entonces $\int_\gamma \dfrac{dz}{z - z_1} = 2\pi i$.

iii) Probar que si $|z_1 - z_0| > r$, entonces $\int_\gamma \dfrac{dz}{z - z_1} = 0$.

8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$. Demostrar que si $f_n \stackrel{\text{unif}}{\longrightarrow} f$ en una curva $\gamma \subseteq \Omega$ entonces $\int_\gamma f_n(z)dz \longrightarrow \int_\gamma f(z)dz$.

9. Evaluar $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz$ siendo γ cada una de las siguientes curvas:



10. Encontrar todos los posibles valores de $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$, donde γ es una curva diferenciable simple cerrada que no pasa por $\pm i$.

11. Sea γ la curva cuya imagen es la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ parametrizada por $\gamma(t) = a\cos t + i\, b \operatorname{sen} t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.
Calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ y deducir que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

12. Sea γ una curva cerrada y $w \in \mathbb{C}$ tal que $w \notin \gamma$. Denotamos por $\eta(\gamma, w)$ al índice de la curva γ con respecto a w. Probar:
   i) $\eta(\gamma, w) = -\eta(-\gamma, w)$ donde $-\gamma$ se define como en el ejercicio 2.
   ii) $\eta(\gamma, w) = 0$ para todo $w \notin \{z : |z| \leq \max|\gamma|\}$.
   iii) $\eta(\gamma, w)$ es continua.
   iv) $\eta(\gamma, w)$ es constante como función de w en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

13. Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Sea $\varphi : \gamma \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \int_\gamma \varphi(w, z)dw$. Probar que:
   (a) g es continua.
   (b) Si para todo $w \in \gamma$, la función $\varphi(w, -) : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y además $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(w, z)$ resulta continua en w y z, entonces g es holomorfa y
$$g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial\varphi}{\partial z}(w, z)\, dw.$$

14. (a) Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y $f : \gamma \to \mathbb{C}$ una función continua.
Definimos $\varphi : \gamma \times (\mathbb{C} \setminus \gamma) \to \mathbb{C}$ por $\varphi(w, z) = \dfrac{f(w)}{w - z}$ y $g : \mathbb{C} \setminus \gamma \to \mathbb{C}$ por $g(z) = \int_\gamma \varphi(w, z)dw$. Probar que g es holomorfa y
$$g^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw.$$

(b) Deducir que si γ es cerrada y f es holomorfa, entonces se tiene que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i\, \eta(\gamma, z)} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

15. Calcular:

i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z-2} dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 4e^{it}$,

ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{z+1} dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z})$,

iii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$,

iv) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3} dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = \frac{2}{3} e^{it}$,

v) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

16. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$ tales que $f_n \overset{\text{unif}}{\longrightarrow} f$ en K para todo compacto K de Ω (notar que f_n puede no tender uniformemente a f en Ω). Probar que si f_n es holomorfa en Ω para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es holomorfa en Ω y $f_n' \overset{\text{unif}}{\longrightarrow} f'$ en K para cada compacto K de Ω.

    ¿Vale el mismo resultado para funciones de variable real (cambiando holomorfa por derivable)?

17. Probar que $f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt^2} dt$ es una función holomorfa en $\operatorname{Re}(z) > 0$.

18. Probar que si $f(z)$ es continua en el disco cerrado $|z| \leq r$ y holomorfa en el disco abierto $|z| < r$, se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

    para todo $|z| < r$.