

ANÁLISIS COMPLEJO - SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2019

Práctica N°2. Funciones Holomorfas. Transformaciones Conformes.

1. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Probar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a + ib \iff \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = a \text{ y } \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = b \right).$$

2. Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sean $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, tales que f es derivable en $z_0 = a + ib$.

(a) Probar que g es diferenciable en (a, b) .

(b) Calcular

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$$

en términos de u y v . ¿Qué se deduce?

(c) ¿Qué relación hay entre $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(a, b)$?

3. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + iy = 0. \end{cases}$$

Verificar que f es continua en 0 y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero *no* es derivable.

4. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones de $z = x + iy$ y hallar $f'(z)$:

(a) $f(z) = y + ix,$

(h) $f(z) = z^2 \cdot \bar{z},$

(b) $f(z) = \bar{z}$

(i) $f(z) = \frac{z + 1}{1 - z},$

(c) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy),$

(d) $f(z) = x^2 + iy^2,$

(j) $f(z) = \begin{cases} \frac{x + iy}{x^2 + y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$

(e) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$

(f) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x),$

(g) $f(z) = z^3 - 2z,$

5. Una función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de tipo C^2 es *armónica* si verifica $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. A su vez, $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una *conjugada armónica* de u si la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ es holomorfa.

- (a) Probar que si la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son C^2 , entonces son armónicas. Deducir que si u es una función C^2 que admite una conjugada armónica, entonces u es armónica.
- (b) Probar que si v y \tilde{v} son conjugadas armónicas de u , entonces v y \tilde{v} difieren en una constante.
- (c) Hallar conjugadas armónicas, cuando sea posible, de las siguientes funciones:

$$\text{i. } u_1(x, y) = x^2 - y^2, \quad \text{ii. } u_2(x, y) = x^2 y^2, \quad \text{iii. } u_3(x, y) = 2x(1 - y).$$

- (d) Probar que si v es conjugada armónica de u , las curvas de nivel de u y v se cortan de manera ortogonal.

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región (es decir, un subconjunto de \mathbb{C} abierto, conexo y no vacío).

- (a) Probar que para todos z_0 y z_1 en Ω existe una curva γ , C^1 a trozos, tal que $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z_1$.
- (b) Si f es holomorfa en Ω y $f' \equiv 0$ en Ω , probar que f es constante.

7. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar:

- (a) $\operatorname{Re}(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte, (c) $|f|$ cte $\Rightarrow f$ cte, (e) \overline{f} holomorfa $\Rightarrow f$ cte.
 (b) $\operatorname{Im}(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte, (d) $\arg(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte,

8. Sean $L_1, \dots, L_n \subseteq \mathbb{R}^2$ (o \mathbb{C}) n rectas distintas. Probar que si $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $g(\mathbb{C}) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ entonces g es constante.

9. Sea Ω un abierto simétrico respecto del eje real y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Probar que la función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es holomorfa.

10. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f'(0) = 1$ y para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$f(x + iy) = e^x f(iy).$$

(Sugerencia: definiendo $c, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(iy) = c(y) + is(y)$, probar que $c' = -s$ y que $s' = c$.)

11. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$f(x + iy) = f(x) + f(iy) + 2xyi.$$

12. **Regla de L'Hopital.** Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

13. Calcular:

$$(a) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1}, \quad (c) \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z - e^{\frac{\pi i}{3}})z}{z^3 + 1},$$

$$(b) \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{2z^2 + (3 - 4i)z - 6i}, \quad (d) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}.$$

14. Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una curva C^1 . Sea $v = \gamma'(t_0) \neq 0$ el número complejo que se obtiene trasladando al origen el vector tangente a la curva en $t = t_0$. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y sea $z = f'(\gamma(t_0)) \neq 0$. Mostrar que zv es el número complejo que se obtiene trasladando al origen el vector tangente a la curva $f \circ \gamma$ en $t = t_0$.
15. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por $\gamma_1(t) = t$ y $\gamma_2(t) = (1 + i)t$. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \operatorname{sen}(z) + z^4$. Calcular en qué ángulo se cortan las curvas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ en $t = 0$.

Función logaritmo y raíces n -ésimas

16. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama del logaritmo de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.
- (a) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω .
- (b) Sean g_1, g_2 dos ramas de logaritmo en Ω . Demostrar que si Ω es conexo y existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1(z) = g_2(z) \forall z \in \Omega$.
- (c) Demostrar que si existe una rama del logaritmo en Ω , entonces $S^1 \not\subset \Omega$.
17. Sean $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $b \in \mathbb{C}, a \in \Omega$. Definimos $a^b = e^{b \cdot g(a)}$.
- (a) Verificar que si $b \in \mathbb{Z}$, a^b no depende de la elección de g y coincide con $\underbrace{a \cdots a}_b$.
- (b) Calcular todos los valores que pueden tomar $i^i, (-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.
- (c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones $h_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, h_1(z) = z^b$ y $h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, h_2(z) = a^z$ son funciones holomorfas.
- (d) Sean $z \in \Omega, a, b \in \mathbb{C}$ tales que $z^a \in \Omega$. ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? ¿Qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si se sabe que $b \in \mathbb{Z}$?
18. Sea Log la rama principal del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(t) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{i-t}{i+t} \right).$$

19. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama de la raíz n -ésima de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. En tal caso, denotaremos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.
- (a) Probar que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, hay exactamente dos ramas de \sqrt{z} en Ω . Definirlas.
- (b) Probar que toda rama de \sqrt{z} es holomorfa.
- (c) Si Ω es conexo y f es una rama de \sqrt{z} en Ω , entonces f y $-f$ son todas las ramas.

20. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Sea $g(z)$ una rama del logaritmo definida en Ω y sea $\sqrt[3]{z}$ la rama de la función raíz cúbica definida en Ω por $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$.
- Demostrar que para toda rama g , $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo z en Ω .
 - Hallar todas las ramas g para las cuales $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3}g(z)$ para todo z en Ω .
 - Probar que si se cambia Ω por $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, aumenta la cantidad de ramas que satisfacen el ítem (b).

Transformaciones conformes

21. Demostrar que si f es holomorfa en un dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ que contiene a z_0 y $f'(z_0) \neq 0$ entonces f es una aplicación conforme en z_0 .
22. Determinar donde las siguientes transformaciones son conformes:
- $f(z) = z^3 - 3z + 1$
 - $f(z) = \tan(z)$
 - $f(z) = z - e^z + 1 - i$
 - $f(z) = ze^{z^2} - 2$
 - $f(z) = z - \text{Log}(z + i)$
 - $f(z) = z^2 + 2iz - 3$
23. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una transformación conforme en cada punto del plano complejo.
- ¿En cuáles puntos de \mathbb{C} , la transformación $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es conforme?
 - ¿En cuáles puntos de \mathbb{C} , la transformación $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $h(z) = e^{f(z)}$ es conforme?