Análisis Complejo — 1^{er} Cuatrimestre de 2017

Soluciones al Segundo Parcial

---

1. Sea $f : \overline{B(0,r)} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y holomorfa en $B(0,r)$, y tomemos puntos distintos $z_1, \ldots, z_n \in B(0,r)$. Si $Q(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$, pruebe que

$$z \in B(0,r) \longmapsto P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{Q(\xi) - Q(z)}{\xi - z} \frac{f(\xi)}{Q(\xi)} d\xi \in \mathbb{C}$$

define un polinomio de grado $n-1$ que coincide con f en $\{z_1, \ldots, z_n\}$.

1. Dado $z \in B(0,r)$ consideremos la función

$$\xi \in B(0,r) \longmapsto g_z(\xi) = \frac{Q(\xi) - Q(z)}{\xi - z} \frac{f(\xi)}{Q(\xi)} \in \mathbb{C}.$$

y escribamos Z al conjunto $\{z_1, \ldots, z_n\}$. Si $z \notin Z$, entonces g_z tiene una singularidad evitable en z, y que sus únicas posibles singularidades están en Z, donde

$$\operatorname{Res}(g_z, z_i) = \frac{Q(z_i) - Q(z)}{z_i - z} \frac{f(z_i)}{Q'(z_i)}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Más aún, la fórmula a la derecha es válida si $z \in Z$ pasando al límite, pues en tal caso $g_z(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$ y la fórmula de Cauchy prueba que $P(z) = f(z)$. También es válida si $f(z_i) = 0$, pues en ese caso g_z es holomorfa en z_i y su residuo en ese punto es cero. El teorema de los residuos asegura entonces que

$$P(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q(z_i) - Q(z)}{z_i - z} \frac{f(z_i)}{Q'(z_i)},$$

y la expresión a la derecha es una combinación lineal de polinomios de grado $n-1$, así es un polinomio de grado $n-1$ a menos que f se anule idénticamente en $\{z_1, \ldots, z_n\}$, como queríamos probar.

2. Pruebe que para $p > 1$ es $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(p + \cos\xi)^2} = \frac{2\pi p}{(p^2 - 1)^{3/2}}$.

2. Siguiendo el Ejercicio 36 de la Guía 7, obtenemos la función racional

$$R(z) = \frac{4z}{(z^2 + 2pz + 1)^2}$$

que tiene polos dobles en $z_1 = -p + \sqrt{p^2 - 1}$ y $z_2 = -p - \sqrt{p^2 - 1}$ y cumple que

$$\frac{1}{i} \int_{\partial \mathbb{E}} R(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(p + \cos \xi)^2}.$$

Como $z_1 z_2 = 1$ y como $|z_2| = p + \sqrt{p^2 - 1} > 1$, pues $p > 1$, deducimos que $z_1 \in \mathbb{E}$ es el único polo de R en el disco unidad. Además, el residuo en este punto es

$$\lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz} \big((z - z_1)^2 R(z) \big) = -4 \frac{z_2 + z_1}{(z_1 - z_2)^3} = \frac{p}{(p^2 - 1)^{3/2}}.$$

Por el Teorema de los Residuos, obtenemos entonces que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(p + \cos \xi)^2} = \frac{2\pi p}{(p^2 - 1)^{3/2}}$$

como queríamos.

Otra forma de resolver el ejercicio es la siguiente.

2. Consideremos la integral

$$I(p) = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{p + \cos \xi}.$$

Siguiendo, otra vez, el Ejercicio 36 de la Guía 7, obtenemos la función racional

$$S(z) = \frac{2}{z^2 + 2pz + 1}$$

que tiene un polo simple en z_1 y

$$\mathrm{Res}(S, z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) S(z) = \frac{1}{(p^2 - 1)^{1/2}}.$$

Un razonamiento análogo al anterior prueba que

$$I(p) = \frac{2\pi}{(p^2 - 1)^{1/2}}.$$

La integral del ejercicio se obtiene calculando $-I'(p)$. El beneficio de tomar este camino es que el cálculo del residuo de S en z_1 es un poco más simple.

3.

(I) Sea f una función holomorfa en un entorno de $\mathbb{E}$ y supongamos que $f(\overline{\mathbb{E}}) \subseteq \mathbb{E}$. Entonces f tiene exactamente un punto fijo en $\mathbb{E}$.

(II) Determine el número de raíces de $z^8+3z^7+6z^2+1$ en el anillo $1<|z|<2$.

3.

(I) Por hipótesis, si $|z|=1$ entonces $|f(z)|<1=|z|$, y luego el teorema de Rouché asegura que $f(z)-z$ y $-z$ tienen el mismo número de ceros en $\mathbb{E}$. Dado que $-z$ tiene exactamente un cero en $\mathbb{E}$, lo mismo es cierto para $f(z)-z$, que prueba que f tiene exactamente un punto fijo en $\mathbb{E}$.

(II) Si $|z|=2$ entonces $|3z^7|=384>256+24+1\geqslant |z^8+6z^2+1|$, así el teorema de Rouché prueba que $p(z)=z^8+3z^7+6z^2+1$ tiene el mismo número de raíces que $3z^7$ en $2\mathbb{E}$ contadas con multiplicidadd, es decir, 7. Análogamente, si $|z|=1$ entonces $|6z^2|=6>1+3+1\geqslant |z^8+3z^7+1|$, que prueba que $p(z)$ tiene 2 raíces en $\mathbb{E}$ contadas con multiplicidad. Finalmente, la última desigualdad que probamos implica, en particular, que p no tiene raíces en $\partial\mathbb{E}$, así que tiene 5 raíces en el anillo del enunciado, como queríamos probar.

4. Sea $\mathscr{F}$ una familia en $\mathscr{O}(\mathbb{E})$, y supongamos que existe una sucesión de constantes positivas $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

- $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} M_n^{1/n} \leqslant 1$
- si $f=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in \mathscr{F}$ entonces $|a_n|\leqslant M_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

Pruebe que $\mathscr{F}$ es una familia normal.

4. Por el teorema de Montel es suficiente verificar que la familia $\mathscr{F}$ es localmente acotada, y para esto es suficiente, a su vez, ver que está acotada en el compacto $K_r=\overline{B_r(0)}$ para cada $r\in(0,1)$. A este fin, tomemos $f\in\mathscr{F}$ y $z\in K_r$ y notemos que por hipótesis y nuestra elección de z,

$$|f(z)| = \left|\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} M_n r^n := M(r).$$

Pero como $\limsup_{n\to\infty} M_n^{1/n} r \leqslant r < 1$ resulta que $M(r)<\infty$, y luego que $|f|_{K_r}\leqslant M(r)$ para cada $f\in\mathscr{F}$. Esto prueba que $\mathscr{F}$ es localmente acotada, y luego normal, como queríamos.

5. Sea $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorfa tal que $f(0) = 0$. Pruebe que el producto infinito

$$g(z) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - f(z^n))$$

define una función holomorfa en $\mathbb{E}$ que no tiene ceros en dicha región.

5. Dado que $f(0) = 0$, podemos escribir $f(z) = zh(z)$ donde h es holomorfa en $\mathbb{E}$. En particular, $|h|_{B_{1/2}}$ es finito. Sea $f_n(z) = f(z^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y veamos que la serie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalmente en $\mathbb{E}$: esto prueba que el producto del enunciado converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{E}$ y define entonces una función holomorfa sobre el disco unidad y, además, que el conjunto de raíces de g es

$$\{z \in \mathbb{E} : 1 - f_n(z) = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dado que $f(z^n) \in \mathbb{E}$ siempre que $z \in \mathbb{E}$, este último conjunto es vacío, y deducimos que g no tiene ceros en $\mathbb{E}$. Para hacer lo primero, tomemos $r \in (0,1)$ y K_r como en el ejercicio anterior, y $n_r \in \mathbb{N}_0$ tal que $r^n < 1/2$ si $n > n_r$. Podemos hacer la estimación

$$\sum_{n>n_r} |f(z^n)|_{K_r} \leqslant |h|_{B_{1/2}} \sum_{n>n_r} r^n < \infty$$

que prueba lo que queríamos.

Otra forma de resolver el ejercicio es la siguiente.

5. Dado que $f(0) = 0$ y que $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$, el lema de Schwarz asegura que $|f(z)| \leqslant |z|$ para cada $z \in \mathbb{E}$. De esto deducimos que $|f(z^n)| \leqslant |z|^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \mathbb{E}$, por lo que, con la misma notación anterior, para cada $r \in (0,1)$ tenemos la estimación

$$\sum_{n\geqslant 0} |f(z^n)|_{K_r} \leqslant \sum_{n\geqslant 0} r^n = \frac{1}{1-r} < \infty.$$

Nuevamente, esto prueba que el producto del enunciado converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{E}$ y define entonces una función holomorfa sobre el disco unidad y, además, que el conjunto de raíces de g es

$$\{z \in \mathbb{E} : 1 - f_n(z) = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\},$$

el conjunto vacío.