Análisis Complejo — 1er Cuatrimestre de 2017

Soluciones al Primer Parcial

---

1. Pruebe que la imagen de una función entera no constante es densa en $\mathbb{C}$.

1. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ entera y supongamos, por el absurdo, que su imagen no es densa. Entonces existe un disco $B(c,r)$ de forma que $f(\mathbb{C}) \cap B(c,r) = \varnothing$ o, lo que es lo mismo, tal que $|f(z) - c| \geqslant r$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Esto dice que la función entera $g(z) = (f(z) - c)^{-1}$ es acotada. Por el teorema de Liouville, resulta que g es constante, y luego lo mismo es cierto para f, contra nuestra hipótesis. ◀

2. Sea $f : B_R(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f^{(i)}(0) = 0$ para $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Definimos $M : (0,R) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Pruebe que para $|z| \leqslant r < R$ se cumple que

$$|f(z)| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}|z|^n.$$

2. Sea $g : B_R(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z) = f(z)/z^n$ si $z \neq 0$ y $g(0) = f^{(n)}(0)/n!$. Entonces g es holomorfa en $B_R(0)$: esto es obvio, excepto en $z = 0$, y allí podemos, por ejemplo, notar que admite un desarrollo en serie de potencias con primer término $f^{(n)}(0)/n!$. Si tomamos $z \in B_r(0)$, sabemos que

$$|g(z)| \leqslant \max_{|\xi|=r} |g(\xi)|,$$

pues el máximo de g en $\overline{B}_r(0)$ se acanza en su borde, y el término de la derecha es $M(r)r^{-n}$, que da lo que queríamos. ◀

3. Encuentre todas las funciones enteras $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)^4 - f\left(\frac{1}{n}\right)^3 - n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = -1.$$

3. Si dividimos la ecuación por n^2, obtenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(f(1/n)^3 - 1)(f(1/n) - (1/n)^2) = 0.$$

Así la función entera $g(z) = (f(z)^3 - 1)(f(z) - z^2)$ se anula en una sucesión que acumula en $0 \in \mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ es conexo, el teorema de la identidad asegura que g es idénticamente nula. Supongamos ahora que h_1 y h_2 son enteras y $h_1 h_2$ es identicamente nula. Si h_1 no se anula en un punto, no se anula, por continuidad, en un disco con centro en ese punto, y luego h_2 se anula en un disco: por el teorema de la identidad, h_2 es idénticamente nula. Aplicando lo anterior a g, deducimos que debe ser el caso que $f(z) = z^2$, o bien que $f(z)$ es constante, e igual a una raíz cúbica de la unidad.

4. Consideremos la serie $\sum_{n \geqslant 0} (1-z^2)^n$. Pruebe que converge absolutamente dentro del conjunto

$$\left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r^2 < 2\cos 2\theta \right\},$$

y diverge fuera de su clausura.

4. La serie es geométrica de parámetro $w = 1 - z^2$, luego converge absolutamente si $|1 - z^2| < 1$ y diverge si $|1 - z^2| > 1$. Si escribimos $z = re^{i\theta}$, entonces $|1 - z^2|^2$ es igual a

$$(1 - r^2 e^{2i\theta})(1 - r^2 e^{-2i\theta}) = 1 - r^2(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + r^4 = 1 - 2r^2 \cos 2\theta + r^4.$$

Así $|1 - z^2| < 1$ exactamente cuando $r^2 < 2\cos 2\theta$ y $|1 - z^2| > 1$ exactamente cuando $r^2 > 2\cos 2\theta$. ◀

5. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ entera tal que $|f(z)| \leqslant e^{|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que entonces $|f'(z)| \leqslant e^{|z|+1}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

5. Usemos la fórmula de Cauchy en $B_r(z)$ para $f'(z)$. Esta dice que para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Notemos ahora que, si $\xi = z + re^{it}$, entonces, por un lado, $|\xi - z|^2 = r^2$ y, por otro, que por hipótesis $|f(\xi)| \leqslant e^{|\xi|} \leqslant e^r e^{|z|}$. La estimación estándar asegura entonces que

$$|f'(z)| \leqslant \frac{2\pi r}{2\pi} \frac{1}{r^2} e^r e^{|z|} = e^{|z|} e^r / r$$

y basta que tomemos $r = 1$. ◀