# CLASE DEL 19/08

MARTÍN MANSILLA

La idea de esta clase es poder entender algunas formas de ver a $\mathbb{C}$ que existen y cuales son las ventajas y desvantajas de cada una. De esta forma ganar intuición sobre cuando usar cada caracterización de $\mathbb{C}$.

## 1. Relación entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Construcción de un cuerpo con más respuestas.

Podemos definir al conjunto de los números complejos como

$$\mathbb{C} := \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}\},$$

dado un elemento $z = a + ib$ decimos que $a$ es su parte real y $b$ su parte imaginaria, es común la notación $a = \mathrm{Re}(z)$ y $b = \mathrm{Im}(z)$.

En este conjunto tiene sentido y será útil definir una suma y un producto. Dados dos elementos $z = a + ib, w = c + id$ definimos su suma como el número complejo $z + w = (a + c) + i(b + d)$, es decir

- $\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$,
- $\mathrm{Im}(z + w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)$.

El elemento $0_{\mathbb{C}} = 0 + i0$ es el neutro para esta suma. El producto de $z$ y $w$ tiene una forma más retorcida de definirse, así $z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$, que en la notaciíon de parte real e imaginaria queda

- $\mathrm{Re}(z \cdot w) = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)$,
- $\mathrm{Im}(z \cdot w) = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w) + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w)$.

No es dificil ver que el elemento $1_{\mathbb{C}} = 1 + i0$ es el neutro para este producto. Con estas operaciones podemos ver que $\mathbb{C}$ resulta un cuerpo, al igual que $\mathbb{R}$ con la suma y el producto usuales.

En este sentido cierta intuición de como es $\mathbb{R}$ nos servirá para entender a $\mathbb{C}$. Por ejemplo tiene sentido definir polinomios con valores complejos al igual que pasa con valores reales. De todas maneras rápidamente podemos encontrar diferencias entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ y los polinomios son una primera fuente de esa diferencia. Por ejemplo el polinomio $P(x) = x^2 + 1$ no puede anularse nunca tomando valores reales,

$$P(x) = x^2 + 1 \geq 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

pero si consideramos $z = 0 + i1$, vale que $z^2 = -1 + i0$ y luego $P(z) = 0$. Más aún, aunque sea muy sencillo armar polinomios que no tienen raíces sobre $\mathbb{R}$ el teorema fundamental del álgebra dice que sobre $\mathbb{C}$ siempre las tendrá.

Por ahora no tenemos mucho más que agregar acerca de las similitudes y diferencias que nacen al comparar a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}$. De todos modos no está demás decir que $\mathbb{R}$ está incluído en $\mathbb{C}$ de muchas formas. Dos inclusiones naturales son

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ a &\to a + i0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ a &\to 0 + ia. \end{aligned}$$

Ambas inclusiones son lineales (podemos pensar en todas las formas de meter a $\mathbb{R}$ dentro de $\mathbb{C}$ de manera lineal) pero solo la primera es además un morfismo que respeta ambas estructuras de cuerpo.

## 2. $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}^2$. Herencia de la métrica y un poco de intuición geométrica geometría.

Por otra parte podemos ver a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}^2$, a quien también llamamos el plano real, del siguiente modo

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^2 \\ a + ib &\to (a, b), \end{aligned} \tag{1}$$

Esto nos permitirá estudiar los aspectos más geométricos de $\mathbb{C}$. Por ejemplo, gracias a esta identificación, podemos impregnar a $\mathbb{C}$ con la métrica euclideana que viene de $\mathbb{R}^2$. Diremos que el módulo de un número complejo es la norma euclideana de su vector en $\mathbb{R}^2$ asociado,

$$|z| = |a + ib| = \|(a, b)\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Así podemos pensar en distancias, dados $z, w \in \mathbb{C}$ decimos que la distancia entre ambos es

$$d(w, z) = d(z, w) = |z - w|.$$

Por ejemplo podemos considerar los siguientes conjuntos interesantes y de importancia:

- Todos los puntos a distancia menor estricta que 1 del $0_{\mathbb{C}}$, es decir el disco unitario
$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$
- Todos los puntos a distancia exactamente 1 del $0_{\mathbb{C}}$, es decir el circulo unitario.
$$S^1 = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$
*(Las notaciones refieren otros dos nombres de este conjunto: la esfera de dimensión* 1 *y el Toro de dimensión* 1*. Esto puede generar una cierta grieta en la forma de verlo y depende de la tradición y el área de estudio de quién lo nombre.)*
- Todos los puntos a distancia menor o igual a 1 del $0_{\mathbb{C}}$, es decir el disco unitario cerrado
$$\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

Para cualquier $r \geq 0$ podemos considerar los dilatados por $r$ de estos conjuntos teniendo así¿

- El disco de radio $r$
$$r\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}.$$
- El circulo de radio $r$
$$rS^1 = r\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}.$$
- El disco cerrado de radio $r$
$$r\overline{\mathbb{D}} = \overline{r\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}.$$

Observermos que si $r = 0$ los tres son el conjunto $\{0_{\mathbb{C}}\}$. Como sabemos de $\mathbb{R}^2$ una forma de parametrizar al circulo unidad es
$$S^1 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) : \theta \in [0, 2\pi)\},$$
mediante la identificación que se ve en (1) es fácil ver que para cualquier $z \in S^1$ hay un $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ (además es único), como notación usaremos
$$e^{i\theta} = cos(\theta) + i \sin(\theta).$$
Ahora, para cualquier $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = r$, podemos escribirlo $z = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta}$ (si $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ entonces $\theta$ es único).

La descripción según la parte real y la imaginaria de un número complejo se corresponde con la descripción cartesiana del plano real y aquella que tiene en cuenta su módulo (o largo) y su ángulo respecto al eje real se corresponde con la descripción polar de $\mathbb{R}^2$.

Podemos entonces tratar de entender la geometría de este espacio y también como se relacionan ciertas funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ con esta geometría.

Ya mencionamos que al tener un producto y una suma en $\mathbb{C}$ podemos definir polinomios allí. Una familia de funciones particular pero que en algún sentido son los ladrillos fundamentales de la familia de polinomios en general son lo monomios. Esto es, dado $n \in \mathbb{N}$ las funciones

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\to z^n, \end{aligned}$$

que,

- Si $n = 0$ será la función identicamente $1_{\mathbb{C}}$.
- si $n = 1$ será la identidad en $\mathbb{C}$ (que a cada $z$ lo manda en sí mismo).
- En general es elevar a la $n$.

**Ejemplo 2.1.** Con $n \geq 2$

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\to z^n. \end{aligned}$$

Para entender como esta función transforma el espacio pensemos en la familia de conjuntos que nace de considerar, dado $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ fijo, al conjunto

$$A_{\theta_0} := \{z \in \mathbb{C} : z = |z|e^{i\theta} \text{ con } 0 \leq \theta \leq \theta_0\}.$$

**Pregunta 2.1.** ¿Qué conjunto es $f_n(A_{\theta_0})$? ¿Como depende de la relación entre $\theta_0$ y $n$?

Primero intentemos entender que es lo que $f_n$ hace en general a un número complejo $z$ cualquiera, lo haremos para $n > 1$ ya que si $n = 0, 1$ no hay mucho que meditar para descubrir lo que pasa. Dado $z \in \mathbb{C}$ queremos elevarlo a la $n$ y poder describir como cambió $z^n$ respecto de $z$, para esto podemos considerar su descripción cartesiana o la polar. La descripción cartesiana no es muy compatible con la operación de *"elevar a la n"* ya que, si $z = a + ib$, el número $(a + ib)^n$ no es muy fácil de describir en función de $a$ y $b$. Por ejemplo usando lo que Newton nos dejó sobre binomios tenemos

$$z^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (ib)^{n-k},$$

pero eso no hecha mucha luz sobre el asunto. Por otra parte si pensamos en $z = |z|e^{i\theta}$ tenemos

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}.$$

Esta expresión permite ver con más claridad como depende $z^n$ de $|z|$ y de $\theta$. En primer lugar el ángulo de $z^n$ es el que se obtiene girando $n$ veces tanto como el ángulo de $z$, en cuánto al módulo de $z^n$ tenemos

- si $|z| > 1$ entonces $|z^n| = |z|^n > |z|$. Se "estira" $z^n$ respecto del número original.
- si $|z| = 1$ tenemos $|z^n| = |z|^n = 1 = |z|$. El largo de $z^n$ no cambia respecto del de $z$ (tan solo gira).
- si $|z| < 1$ vale que $|z^n| = |z|^n < |z|$. Con lo cual $z^n$ se "contrae" respecto de $z$.

Así podemos deducir que

**Proposición 2.2.**

$$f_n(A_{\theta_0}) = \begin{cases} A_{n\cdot\theta_0} & \text{si } n\cdot\theta_0 < 2\pi, \\ \mathbb{C} & \text{si } n\cdot\theta_0 \geq 2\pi. \end{cases}$$

*Proof.* Comencemos con el caso $n \cdot \theta_0 < 2\pi$, esto basta para poder definir $A_{n\cdot\theta_0}$. Queremos ver una doble inclusión de conjuntos.

$\underline{f_n(A_{\theta_0}) \subset A_{n\cdot\theta_0}:}$ si $z \in A_{\theta_0}$ podemos describir $z = |z|e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq \theta_0$ y vale $z^n = |z^n|e^{i(n\cdot\theta)}$, como $0 \leq n\cdot\theta \leq n\cdot\theta_0 < 2\pi$ tenemos $z \in A_{n\cdot\theta_0}$.

$\underline{A_{n\cdot\theta_0} \subset f_n(A_{\theta_0}):}$ si $w \in A_{n\cdot\theta_0}$ entonces $w = |w|e^{i\alpha}$ con $0 \leq \alpha \leq n\cdot\theta_0$, queremos hallar $z \in A_{\theta_0}$ tal que $z^n = w$. Será necesario que $z$ cumpla $|z^n| = |z|^n = |w|$ lo cual determina que $|z| = \sqrt[n]{|w|}$ (lo cual está bien definido por que $|w| \geq 0$). Además queremos que $z = |z|e^{i\beta}$ con $0 \leq \beta \leq \theta_0$ y además $e^{in\beta} = e^{i\alpha}$ con lo cuál

$$n\beta = \alpha + 2k\pi \text{ con } k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

lo que es igual a

$$\beta = \frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n}2\pi \text{ con } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Como $0 \leq \frac{\alpha}{n} \leq \theta_0$ puedo tomar $k = 0$ y $\beta = \frac{\alpha}{n}$.

Completar el caso de $n \cdot \theta_0 \geq 2\pi$ queda como ejercicio para la lectora. □

Estudiemos ahora otra función y veamos como esta altera los complejos.

**Ejemplo 2.2.** La función exponencial compleja

$$\begin{aligned} e^z &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ a + ib &\to e^a e^{ib}, \end{aligned}$$

Si definimos, dado $M_0 > 0$ fijo

$$B_{M_0} = \{z = a + ib : 0 \leq b \leq M_0\},$$

buscaremos la respuesta a la siguiente pregunta.

**Pregunta 2.3.** ¿Qué conjunto es $e^z(B_{M_0})$?

Consideramos, dado $0 \leq \theta_0 < 2\pi$ $A^*_{\theta_0} := A_{\theta_0} - \{0_{\mathbb{C}}\}$ y también para el espacio en general

$$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0_{\mathbb{C}}\}.$$

.

**Proposición 2.4.**

$$e^z(B_{M_0}) = \begin{cases} A^*_{M_0} & \text{si } M_0 < 2\pi, \\ \mathbb{C}^* & \text{si } n \cdot M_0 \geq 2\pi. \end{cases}$$

**Ejercicio 2.5.** Probar la Proposición 2.4

*(Sugerencia: usar descripción cartesiana de los números complejos)*

Se recomienda a la lectora que medite sobre la relación entre las funciones estudiadas y la elección de la forma de describir a los números complejos en el estudio de cada una.

Sigamos con algunos aspectos geométricos de $\mathbb{C}$. De la noción de recta en $\mathbb{R}^2$ y mediante la identificación entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ podemos decir que una recta en $\mathbb{C}$ es un conjunto del tipo

$$L := \{z \in \mathbb{C} : A \cdot \mathrm{Re}(z) + B \cdot \mathrm{Im}(z) + D = 0\}, \tag{2}$$

para ciertos parámetros $A, B, D$ que determinan el sentido de $L$ y su distancia al $0_{\mathbb{C}}$.

Por otro lado y del mismo modo, $\mathbb{C}$ hereda de $\mathbb{R}^2$ la noción de cirulo o circunferencia. Así la circunferencia de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$ será el conjunto

$$C_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Observemos que la definición de circunferencia naturalmente remite a la descripción polar de $\mathbb{C}$ mientras que la de recta a la cartesiana. Desmenucemos la definción de circunferencia para entender una descripción alternativa con más impronta del filosofo francés. Si $z \in C_r(z_0)$ para ciertos radio $r > 0$ y centro $z_0 = a_0 + ib_0$ vale que

$$\begin{aligned} r^2 &= |z - z_0|^2 \\ r^2 &= |\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z_0)|^2 + |\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z_0)|^2 \\ r^2 &= \mathrm{Re}(z)^2 - 2a_0\mathrm{Re}(z) + a_0^2 + \mathrm{Im}(z)^2 - 2b_0\mathrm{Im}(z) + b_0^2 \\ r^2 &= |z|^2 - 2a_0\mathrm{Re}(z) + a_0^2 - 2b_0\mathrm{Im}(z) + b_0^2 \qquad (3) \end{aligned}$$

**Proposición 2.6.** Para todo conjunto de parámetros $A, B, D \in \mathbb{R}$ tales que $4D \geq A^2 + B^2$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 + A \cdot \mathrm{Re}(z) + B \cdot \mathrm{Im}(z) + D = 0\},$$

define una circunferencia. Más aún, dados un radio $r > 0$ y un centro $z_0 = a_0 + ib_0$ vale que

$$C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 + A \cdot \mathrm{Re}(z) + B \cdot \mathrm{Im}(z) + D = 0\},$$

con

$$\begin{cases} D & = a_0^2 + b_0^2 - r^2, \\ -2a_0 & = A, \\ -2b_0 & = B. \end{cases}$$

*Proof.* En primer lugar necesitamos conseguir ciertos radio $r > 0$ y centro $z_0 = a_0 + ib_0 \in \mathbb{C}$ tales que

$$C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 + A \cdot \mathrm{Re}(z) + B \cdot \mathrm{Im}(z) + D = 0\}.$$

Suponiendo que esos radio y centro existen, gracias a la ecuación (3), y sabiendo que $z$ cumple al mismo tiempo $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 + A\mathrm{Re}(z) + B\mathrm{Im}(z) + D = 0$ tenemos

$$\begin{cases} D & = a_0^2 + b_0^2 - r^2, \\ -2a_0 & = A, \\ -2b_0 & = B. \end{cases}$$

lo cuál define que $z_0 = -\frac{1}{2}(A + iB)$ y $r = \sqrt{D - \frac{1}{4}(A^2 + B^2)}$.

De todo lo anterior se deduce la segunda afirmación también. $\square$

Será interesante considerar ahora la noción de *"circunferrecta"* que es una generalización que incluye a las circunferencias y las rectas y, como veremos luego, tiene mucho sentido entender como un objeto en sí mismo. Diremos que un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ es un *"circunferrecta"* si tiene existen $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ la siguiente descripción

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : A \cdot \mathrm{Re}(z) + B \cdot \mathrm{Im}(z) + C \cdot |z|^2 + D = 0\}.$$

Observemos que

- Si $C = 0$ resulta que $\mathcal{C}$ es una recta.
- Si $C \neq 0$ y $4CD \geq A^2+B^2$ resulta que $\mathcal{C}$ es una circunferencia de radio $r = \sqrt{\frac{D}{C} - \frac{1}{4C^2}(A^2 + B^2)}$ y centro $z_0 = -\frac{1}{2C}(A + iB)$ (si $r = 0$ es tan solo $\{z_0\}$).
- Si $C \neq 0$ y $4CD < A^2 + B^2$ entonces $\mathcal{C} = \emptyset$.

Veremos ahora un ejemplo que enfatiza la profunda relación que hay entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ en un aspecto que con frecuencia asoma. El plano complejo no es tan solo un cuerpo en el que los polinomios tienen todas sus raíces, es también un lugar que amplía nuestro campo de acción para resolver problemas y da más lugar para conseguir estratégias que resuelvan problemas concretos. Sucede a menudo que problemas y preguntas que se plantean en el contexto exclusivo de los números reales tiene soluciones muy naturales pensando en un problema o pregunta alternativa que involucre a los números complejos.

Como todos sabemos la función de varaible real que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna $\sin(x)$ tiene imagen exactamente el conjunto $[-1, 1]$. Es natural preguntarse lo siguiente

**Pregunta 2.7.** ¿Cómo es la imagen de función seno sobre los números naturales?, o sea, ¿Cómo es el conjunto $\{\sin(k) : k \in \mathbb{N}\}$?

Meditando algún tiempo sobre esta pregunta no encuentro una forma de entender geométrica o intuitivamente que sucede con el conjunto en el contexto donde está planteado. Pensemos ahora en el problema hermano que surge de mirarlo desde una perspectiva más abarcativa. Siendo $\sin(x) = \text{Im}(e^{ix})$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ intentemos entender que sucede con el conjunto

$$\{e^{in} : n \in \mathbb{N}\},$$

con la esperanza de concluir algo sobre el problema original. Podemos polantear la siguiente pregunta.

**Pregunta 2.8.** ¿Cómo es el conjunto $\{e^{ik} : k \in \mathbb{N}\}$?

Para eso necesitaremos un resultado poderoso pero mucho más intuitivo geometricamente. Recordemos que el número $e^{i2\pi\alpha}$ es aquel número complejo inscripto en el círculo unidad que se obtiene al girar una fracción $\alpha$ de vuelta desde el eje real, así para el número $e^{i2\pi\alpha n}$ la fracción $devueltaesn\alpha$ o, lo que es lo mismo, $n$ fracciones $\alpha$ de vuelta.

**Ejercicio 2.9.** Probar que si $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_{>0}$ tal que $m, n \in \mathbb{N}$ son coprimos entonces

$$\{e^{i2\pi k\alpha} : k \in \mathbb{N}\} = G_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}.$$

Vale algo más profundo que se resume en la siguiente proposición

**Proposición 2.10.** Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entonces $\{e^{i2\pi k\alpha} : k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $S^1$

La demostración de este hecho esta en el Apéndice.

**Corolario 2.11.** $\{e^{ik} : k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $S^1$

*Proof.* Es una consecuencia directa de la Proposición 2.10 elegiendo $\alpha = \frac{1}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

**Proposición 2.12.** $\{\sin(k) : k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[-1, 1]$.

*Proof.* Consideremos la función parte imaginaria

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} : \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ z &\to \mathrm{Im}(z), \end{aligned}$$

que cumple $\mathrm{Im}(\{e^{ik} : k \in \mathbb{N}\}) = \{\sin(k) : k \in \mathbb{N}\}$ y $\mathrm{Im}(S^1) = [-1, 1]$. Cómo esta aplicación es contínua vale que

$$\overline{\{\sin(k) : k \in \mathbb{N}\}} = \mathrm{Im}(\overline{\{e^{ik} : k \in \mathbb{N}\}}) = \mathrm{Im}(S^1) = [-1, 1],$$

con lo cual tenemos lo que queríamos probar. □

## 3. $\mathbb{C}$ cómo $S^2$. Agregar el infinito.

Estudiaremos ahora una forma de entender a $\mathbb{C}$ dentro de $\mathbb{R}^3$ que le brinda una perspectiva nueva. Esta forma de ver a los números complejo será muy útil cuando estudiemos ciertas propiedades de las funciones derivables que requieren de una noción de elemento *"infinito"* en el espacio.

Una forma de ver a $\mathbb{C}$ dentro de $\mathbb{R}^3$ es la que nace de pensarlo como un plano y así

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^3 \\ z &\mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), 0). \end{aligned}$$

Otro objeto que está dentro de $\mathbb{R}^3$ es la esfera unitaria de dimensión 2

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

que a lo largo de esta sección llamaremos la esfera y notaremos también directamente $S$. Llamaremos polo norte al punto $N = (0, 0, 1)$ de la esfera, y cuando hablemos de la *"esfera pinchada"* nos estaremos refiriendo a $S^* = S \setminus \{N\}$. Construiremos ahora una forma biunívoca de identificar los puntos de $\mathbb{C}$ con los de la esfera pinchada $S^*$. Construiremos ahora una forma biunívoca de identificar puntos de $S^*$ con los de $\mathbb{C}$, esta construcción en su versión más geométrica se apoya fuertemente en la forma de identificar a $\mathbb{C}$ dentro de $\mathbb{R}^3$ con los puntos del plano con tercera coordenada nula. Así, dado un punto $P \in S^*$ ($Q \neq N$) le asigna el único punto de tal plano que pertenece también pertence a la recta que une $N$ con $Q$. Llamaremos proyección estereográfica de

$Q$ a al punto de $\mathbb{C}$ identificado con ese punto del plano con tercer coordenada nula y lo notaremos $P_S(Q)$. Puede verse que la fórmula para la proyección estereográfica esta dada por

$$\begin{aligned} P_S : S^* &\to \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \end{aligned}$$

y su inversa

$$\begin{aligned} P_S^{-1} : \mathbb{C} &\to S^* \\ z &\mapsto \frac{1}{1+|z|^2}\left(2\mathrm{Re}(z), 2\mathrm{Im}(z), |z|^2 - 1\right). \end{aligned}$$

No es muy complicado ver que ambas funciones son contínuas pensando a $S$ con la métrica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{C}$ con la de su módulo.

Del lado de la esfera faltaría un punto por identificar, pero del lado de los complejos todos tienen su compañera en $S^*$. Esto invita a inventar un cierto elemento $\star$ y considerar $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\star\}$ junto con las extensiones de la proyección estereográfica y su inversa dadas por

$$\begin{aligned} \widehat{P_S} : S &\to \widehat{\mathbb{C}} \\ Q &\mapsto \begin{cases} P_S(Q) & \text{si } Q \neq N, \\ \star & \text{si } Q = N, \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{P_S}^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} &\to S \\ z &\mapsto \begin{cases} P_S^{-1}(z) & \text{si } z \in \mathbb{C}, \\ N & \text{si } z = \star, \end{cases} \end{aligned}$$

Intentemos entender cual es el sentido que tiene esta $\star$.

**Proposición 3.1.** Dada una sucesión $(Q_n)_{n\geq 1} \subset S^*$ son equivalentes

(1) $Q_n \overset{\mathbb{R}^3}{\to} N$.
(2) $|P_S(Q_n)| \to \infty$.

*Proof.* <u>(1) $\implies$ (2)</u>: Como $Q_n \overset{\mathbb{R}^3}{\to} N = (0,0,1)$ sabemos que la sucesión real que consta de la tercer coordenada de $Q_n$ tiende a 1 ($(Q_n)_3 \to 1$). Queremos ver que $|P_S(Q_n)| \to \infty$, lo cuál es equivalente a que $|P_S(Q_n)|^2 \to \infty$ y tenemos

$$\begin{aligned}|P_S(Q_n)|^2 &= \frac{(Q_n)_1^2 + (Q_n)_2^2}{(1-(Q_n)_3)^2} \\ &= \frac{1-(Q_n)_3^2}{(1-(Q_n)_3)^2} \quad (Q_n \in S \text{ y luego } (Q_n)_1^2 + (Q_n)_2^2 + (Q_n)_3^2 = 1) \\ &= \frac{(1-(Q_n)_3)(1+(Q_n)_3)}{(1-(Q_n)_3)^2} \\ &= \frac{1+(Q_n)_3}{1-(Q_n)_3} \underset{n\to\infty}{\to} \infty.\end{aligned}$$

$\underline{(2) \implies (1)}$: Supongamos que no es verdad que lo que queremos probar, esto implica que $(|P_S(Q_n)|)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, más aún $(P_S(Q_n))_{n\geq 1} \subset \overline{B_r(0_{\mathbb{C}})}$ para cierto $r > 0$. Por ser $\overline{B_r(0_{\mathbb{C}})}$ un conjunto compacto en $\mathbb{C}$ existe una subsucesión $(P_S(Q_{n_k}))_{k\geq 1}$ convergente a cierto $z_0 \in \mathbb{C}$. Al ser $P_S^{-1}$ una función contínua tenemos que

$$Q_{n_k} = P_S^{-1}(P_S(Q_{n_k})) \to P_S^{-1}(z_0) \neq N,$$

pero $(Q_n)_{n\geq 1}$ tiende a $N$ y por lo tanto toda subsucesión también, lo cuál es absurdo. $\square$

La Proposición 3.1 casi que nos obliga a rebautizar a $\star$ como $\infty$, y es lo que haremos. De ahora en más $\star = \infty$ y $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Esta nueva perspectiva nos ayudo a entender que significa el infinito en $\mathbb{C}$ y nos brinda una idea intuitiva de como se modifica la geometría del espacio complejo al agregar este nuevo elemento. Pero no tiene demasiado sentido hablar de geometría sin una forma de medir las distancias y la estructura métrica que $\mathbb{C}$ había heredado de $\mathbb{R}^2$ pierde sentido en $\widehat{\mathbb{C}}$. Habrá entonces que darle una nueva estructura. La matemática está plagada de herencias, objetos que no comprendemos del todo intentamos emparentarlos con otros más conocidos y así, esta es una forma habitual de ir construyendo una imagen de lo desconocido. En este sentido $\mathbb{C}$ es un gran heredero y, en este caso, su extensión $\widehat{\mathbb{C}}$ vestirá la métrica que su prima $S$ le presta del siguiente modo: dados $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$ su distancia será

$$d\overline{d}(z,w) = \|\widehat{P_S}^{-1}(z) - \widehat{P_S}^{-1}(w)\|_{\mathbb{R}^3}.$$

Algunas propiedades de esta distancia se enumeran a continuación, se deja su prueba como ejercicio a la lectora dedicada.

(1) Dados $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene $\overline{d}(z,w) = \frac{2|z-w|}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$ y $\overline{d}(z,\infty) = \frac{2}{1+|z|^2}$.
(2) $\overline{d}(z,w) \leq 2$ para todo par $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$.
(3) $(\widehat{C}, \overline{d})$ es compacto.

(4) una sucesioón $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ converge a cierto $z \in \mathbb{C}$ con la métrica usual del módulo si y solo si lo hace con es nueva métrica $\overline{d}$.

(5) Hay suceciones $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ que son de Cauchy con la nueva métrica $\overline{d}$ y no lo son con la étrica del módulo. Pensar si en $\widehat{C}$ esas sucesiones tienen límite y cual debe ser este.

A continuación, con el objetivo de entender un poco mejor como se impregna $\widehat{\mathbb{C}}$ de la geometría de $S$ o, de otro modo, como se traslada la geometría de $S$ a lado de $\mathbb{C}$, ida y vuelta.

Pensemos en los círculos que se apoyan en la superficie de la esfera, esto es, ciertos círculos de $\mathbb{R}^3$ que resultan estar en $S$. Estos circulos son los bordes de los casquetes que resultan de cortar con un plano la esfera o, siendo más precisos, llamaremos *"círculos esféricos* a los conjuntos que se obtienen de intersecar planos con $S$. Recordemos que la ecuación de un plano $\Pi$ en $\mathbb{R}^3$ está dada de forma implicita para ciertos paraámetros $A, B, C, D$ (que determinan su orientación y distancia al $(0,0,0)$) del siguiente modo

$$\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 - D = 0\}.$$

Diremos que $\mathcal{C}_S$ es un *"círculo esférico"* si existe cierto plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{C}_S = \Pi \cap S$. Por último notaremos $\mathcal{C}_S^* = \mathcal{C}_s \setminus \{N\}$ (si $N \notin \mathcal{C}_S$ vale $\mathcal{C}_S^* = \mathcal{C}_s$).

**Proposición 3.2.** $\mathcal{C}_s$ es un *"círculo esférico"* si y solo si $P_s(\mathcal{C}_S)$ es una *"circunferrecta"*. Más aún

$$\mathcal{C}_S = \{(x_1, x_2, x_3) \in S : A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + C \cdot x_3 - D = 0\},$$

si y solo si

$$P_S(\mathcal{C}_S^*) = \{z \in \mathbb{C} : A \cdot \mathrm{Re}(z) + B \cdot \mathrm{Im}(z) + \frac{C-D}{2} \cdot |z|^2 - \frac{C+D}{2} = 0\}.$$

*Proof.* Dado $\mathcal{C}_S = \{(x_1, x_2, x_3) \in S : A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + C \cdot x_3 - D = 0\}$, veamos como es $P_S(\mathcal{C}_S^*)$. Dado $z \in P_S(\mathcal{C}_S^*)$ tenemos que $P_S^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2}\left(2\mathrm{Re}(z), 2\mathrm{Im}(z), |z|^2 - 1\right) \in \mathcal{C}_S$ y luego

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{2\mathrm{Re}(z)}{1+|z|^2} + B \cdot \frac{2\mathrm{Im}(z)}{1+|z|^2} + C \cdot \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} - D = 0 \\ A \cdot \mathrm{Re}(z) + B \cdot \mathrm{Im}(z) + C \cdot \frac{|z|^2-1}{2} - D \cdot \frac{|z|^2+1}{2} = 0 \\ A \cdot \mathrm{Re}(z) + B \cdot \mathrm{Im}(z) + \frac{C-D}{2} \cdot |z|^2 - \frac{C+D}{2} = 0. \end{aligned}$$

Lo anterior prueba las dos implicaciones más fuertes usando que $P_S$ es biyectiva. □

Usemos el resultado anterior para comprender que pasa con los paralelos de la esfera, es decir los *"círculos esféricos* paralelos al ecuador. Los paralelos son *"círculos esféricos* con parÃ¡metros

$A, B = 0$ y $C \neq 0$, es decir la siguiente pinta

$$\mathcal{C}_S = \{(x_1, x_2, x_3) \in S : C \cdot x_3 - D = 0\},$$

y usando $C \neq 0$ podemos pensar, con $\tilde{D} = \frac{D}{C}$,

$$\mathcal{C}_S = \{(x_1, x_2, x_3) \in S : \cdot x_3 - \tilde{D} = 0\},$$

**Proposición 3.3.** $\mathcal{C}_s$ es un paralelo si y solo si $P_s(\mathcal{C}_S)$ es un círculo con centro en $0_{\mathbb{C}}$.

*Proof.* Gracias a la Proposición 3.2 tenemos que

$$P_S(\mathcal{C}_S^*) = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1 - \tilde{D}}{2} \cdot |z|^2 = \frac{1 + \tilde{D}}{2}\}.$$

□

## 4. Apéndice