Singularidades, funciones meromorfas, y residuos

Pedro Tamaroff

1. Singularidades aisladas

I. Polos

Fijemos una región Ω en $\mathbb{C}$, un punto $c \in \Omega$ y $f \in \mathscr{O}(\Omega \smallsetminus c)$. El Teorema de Continuación de Riemann afirma que si se cumple la condición

$$\lim_{z \to c} (z - c) f(z) = 0 \tag{1}$$

entonces f se extiende a una función holomorfa en Ω. En tal caso, diremos que c es una ***singularidad evitable de f***. En general, diremos que una función definida en Ω y holomorfa en $\Omega \smallsetminus c$ tiene una ***singularidad aislada en c***. El objetivo de esta sección es caracterizar el comportamiento de las funciones holomorfas en torno a una singularidad aislada.

Dado que la condición (1) se cumple si f está acotada en un entorno de c, resulta que f es no acotada en cualquier entorno de c si este punto es una singularidad aislada que no es evitable. Podría suceder, sin embargo, que para algún $m \in \mathbb{N}$, se cumpla que

$$\lim_{z \to c} (z - c)^m f(z) = 0 \tag{2}$$

En tal caso, existe un primer $n \in N$ tal que se cumple esta condición, y el razonamiento que hicimos en el caso que (1) prueba que $h(z) = (z-c)^n f(z)$ es holomorfa en todo Ω, y luego que podemos escribir

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - c)^n}$$

donde $h(c) \neq 0$, pues elegimos n mínimo. Decimos en este caso que f tiene un ***polo de orden n en c***; los polos de orden 1 se llaman ***polos simples***.

Teorema 1.1. *Las siguiente propiedades son equivalentes.*

(1) f tiene un polo de orden n en c,

(2) *Existe $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $h(c) \neq 0$ tal que*

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-c)^n} \qquad\qquad \text{si } z \in \Omega \setminus c$$

(3) *Existe un entorno B de c en Ω y $h \in \mathcal{O}(B)$ que se anula solo en c, y lo hace allí con orden n, tal que $f = 1/h$ en $B \setminus c$,*

(4) *Existen constantes positivas m_* y m^* y un entorno B de c en Ω tal que*

$$m_*|z-c|^{-n} \leqslant |f(z)| \leqslant m^*|z-c|^{-n}$$

para $z \in B \setminus c$.

Demostración. La discusión previa al teorema prueba que (1) $\Longrightarrow$ (2), y evidentemente (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4). Para ver que (4) $\Longrightarrow$ (1), notemos que la desigualdad implica, primero, que $f(z)(z-c)^n$ está acotada en un entorno de c y, segundo, que $f(z)(z-c)^{n-1}$ no. Así f tiene un polo de orden n en c, como queríamos ver. ◀

Notemos que del teorema anterior se desprende que el conjunto de funciones holomorfas $g : \Omega \setminus c \longrightarrow \mathbb{C}$ con un polo en c coincide con el conjunto de funciones holomorfas $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ finitas en $\Omega \setminus c$ y tales que $g(c) = \infty$.

Proposición 1.2. *La función f tiene un polo de orden n en c si y solamente si existe un polinomio p de grado n y una función holomorfa f_0 en Ω tal que $f_0(c) = 0$ y*

$$f(z) = p\left(\frac{1}{z-c}\right) + f_0(z) \tag{3}$$

En este caso, f_0 y p están univocamente determinados por f.

Demostración. Si f tiene un polo de orden n en c, sabemos que se escribe de la forma $f(z) = (z-c)^{-n}h(z)$ donde $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $h(c) \neq 0$. Podemos escribir, usando un desarrollo de Taylor finito,

$$h(z) = q(z-c) + (z-c)^{n+1}g_0(z)$$

donde $g_0(z)$ es holomorfa en Ω y q es un polinomio de grado n con $q(c) \neq 0$, y luego obtener la expresión (3) buscada, tomando $p(z) = z^n q(z^{-1})$ y $f_0 = (z-c)g_0$. Recíprocamente, si f se expresa en la forma (3) es evidente que tiene un polo de orden n en c. Finalmente, la unicidad está clara por ser única la función h con la que empezamos. ◂

Otra forma de escribir el resultado de la proposición anterior es la siguiente.

Corolario 1.3. *La función f tiene un polo de orden m en c exactamente cuando admite un desarrollo en serie de la forma*

$$f(z) = \sum_{n \geqslant m} a_n (z-c)^n,$$

convergente en un entorno de c en Ω.

Esto es un ejemplo de una serie de Laurent con parte principal finita; estudiaremos las series de Laurent en la Sección 2.

II. Singularidades esenciales

Diremos que f tiene una ***singularidad esencial en*** c si c no es ni una singularidad evitable ni un polo de f. El siguiente teorema caracteriza el comportamiento errático de f en torno en c en este caso.

Teorema 1.4. (Casorati–Weierstrass) *Son equivalentes:*

(1) f tiene una singularidad esencial en c,

(2) Para todo entorno perforado B' de c en Ω, $f(B')$ es denso en $\mathbb{C}$,

(3) Existe una sucesión (z_n) en $\Omega \smallsetminus c$ que converge a c tal que $(f(z_n))$ no converge en $\mathbb{C}^*$.

Demostración. Para ver que (1) $\implies$ (2), supongamos que existen discos $B(c,r)$ y $B(w,s)$ tal que $f(B(c,r) \smallsetminus c) \cap B(w,s) = \varnothing$. Esto dice que la función $g(z) = (f(z)-w)^{-1}$ es holomorfa y acotada en $B'(c,r)$, así por el teorema de continuación de Riemann, es holomorfa en $B(c,r)$. Resulta que f es holomorfa o tiene un polo en c acorde a si g no se anula en c o tiene allí un cero de orden positivo. Es inmediato que (2) $\implies$ (3), y también que (3) $\implies$ (1): si f es holomorfa en c o si tiene un polo en c, $f(z_n)$ converge siempre, posiblemente a ∞, si $z_n \to c$. ◀

III. Singularidades en ∞

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y supongamos que Ω contiene un entorno perforado de ∞. Existe entonces $r > 0$ y un disco $B_r(0)$ tal que $g = f(z^{-1}) : B_r(0) \smallsetminus 0 \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa. Diremos que ∞ es una singularidad evitable, un polo o una singularidad esencial de f acorde al tipo de singularidad que g tiene en el origen. En particular, f tiene una singularidad evitable en ∞ exactamente cuando existe y es finito $f(\infty)$. Diremos que una función entera es ***trascendente*** si no es un polinomio.

Proposición 1.5. *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ entera. Entonces f es*

(1) trascendente si y sólo si ∞ es una singularidad esencial de f,

(2) un polinomio de grado n si y sólo si ∞ es un polo de orden n de f y

(3) constante si y sólo si ∞ es una singularidad evitable de f.

En particular, si f es trascendente, para cada $c \in \mathbb{C}$ existe una sucesión $(z_n) \in \mathbb{C}$ que tiende a ∞ tal que $f(z_n) \to c$.

Demostración. Basta que veamos la validez de (2) y (3). Si f es un polinomio de grado n, entonces ciertamente ∞ es un polo de orden n de f. Si, por otro lado, $f(z^{-1})$ tiene un polo de orden n en ∞, podemos escribir

$$f(z^{-1}) = p(z^{-1}) + g(z)$$

con p un polinomio de orden n y g holomorfa en un entorno del origen con $g(0) = 0$. La función $h(z) = f(z) - p(z)$ es entonces entera, y $h(\infty) = g(0) = 0$, así por el teorema de Liouville h es idénticamente nula, y f es un polinomio. Por otro lado, (3) es una solamente reformulación del teorema de Liouville, y la última afirmación del teorema es una consecuencia del Teorema de Casorati–Weierstrass. ◄

2. Series de Laurent

La representación en serie de una función holomorfa es útil para entender, por un lado, el comportamiento local de esa función y de sus derivadas, como también —de forma indirecta— la disposición de sus posibles singularidades. Veremos ahora como representar a las funciones holomorfas en regiones que no son simplemente conexas, los anillos. Esta nueva representación local será extremadamente útil, por ejemplo, para entender el comportamiento de las funciones holomorfas en torno a singularidades aisladas.

En lo que sigue, dados $c \in \mathbb{C}$ y $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, escribimos $A_{r,R}(c)$ al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : r < |z-c| < R\}$ y lo llamamos el ***anillo de radio menor*** r ***y radio mayor*** R ***centrado en*** c o, más brevemente, un anillo. Notaremos de ahora en adelante un tal anillo simplemente por A, y quedará fijo durante la sección, y notaremos por A^+ y A^- a los conjuntos $A_{r,\infty}(c)$ y $B_R(c)$, respectivamente, que cumplen que $A = A^+ \cap A^-$. Usaremos la notación $B'_t(c)$ para el anillo $A_{0,t}(c)$.

I. La fórmula de Cauchy en anillos

Lema 2.1. *Sea* $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorfa. Entonces para todo par de números* $u, v \in (r, R)$ *tal que* $u < v$

$$\int_{\partial B_u(c)} f\,dz = \int_{\partial B_v(c)} f\,dz.$$

Demostración. Los lazos que aparecen en las integrales son homotópicos como lazos mediante la homotopía $H : [0,1] \times [u,v] \longrightarrow A$ tal que $H(s,t) = c + te^{2\pi i s}$, así las integrales coinciden. Otra forma de ver esto es la siguiente: sin perder generalidad, podemos asumir que $c = 0$, y podemos parametrizar el anillo A usando la función exponencial y el rectángulo $R = [\log u, \log v] \times [0, 2\pi]$, y escribir

$$\int_{\partial A} f(\xi) d\xi = \int_{\partial R} f(\exp w) \exp w \, dw$$

por un simple cambio de variables. Como R es un rectángulo, que es convexo, y como $f(\exp w)\exp w$ es holomorfa, la integral a la derecha es nula. ◂

Teorema 2.2. (Fórmula de Cauchy en anillos.) *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y supongamos que el anillo A tiene clausura contenida en Ω. Si $z \in A$, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Demostración. Fijemos $z \in A$, y consideremos el cociente holomorfo de f para $\xi \in A$ que extendemos de la forma usual en $\xi = z$:

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}.$$

Por el lema anterior, la integral de g sobre A^+ y la integral de g sobre A^- coinciden, y luego

$$\int_{\partial A^+} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial A^-} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi.$$

Pero $\int_{\partial A^+} \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i$ mientras que $\int_{\partial A^-} \frac{d\xi}{\xi - z} = 0$, así reordenando obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^-} \frac{f(\xi))}{\xi - z} d\xi = f(z),$$

que es lo que queríamos. ◂

Es importante que notemos que las integrales

$$\int_{\partial A^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \qquad \int_{\partial A^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

definen funciones holomorfas en cuatro regiones distintas de $\mathbb{C}$, el interior y exterior de ∂A^+ y el interior y exterior de ∂A^-, respectivamente. Vamos a interesarnos, sin embargo, sólo por dos de ellas: si definimos $f^- : A_r(c) \longrightarrow \mathbb{C}$ y $f^+ : B_R(c) \longrightarrow \mathbb{C}$ usando las fórmulas integrales

$$f^{\pm}(z) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A^{\pm}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

entonces en la intersección $A = A^+ \cap A^-$ tenemos la igualdad $f = f^+ + f^-$, que llamamos la ***descomposición de Laurent de f en A***. En general, no será cierto que esta igualdad se extiende a otras regiones de Ω. El teorema que sigue dice que esta representación es única, y que, como sucede en la fórmula de Cauchy, podemos elegir a los círculos A^+ y A^- con un poco más de libertad.

Teorema 2.3. (Descomposición de Laurent) *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Existen funciones $f^+ \in \mathscr{O}(A^+)$ y $f^- \in \mathscr{O}(A^-)$ tales que $f = f^+ + f^-$ en A y $f^-(\infty) = 0$. Además, estas condiciones determinan a f^+ y f^- unívocamente, de forma que para cualquier $r < t < R$,*

$$\begin{aligned} f^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_t(c)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi && \text{si } z \in B_t(c), \\ f^-(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_t(c)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi && \text{si } z \in \mathbb{C} \smallsetminus \overline{B_t(c)}. \end{aligned}$$

Demostración. Para cada t con $r < t < R$, la función

$$f_t^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_t(c)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

es holomorfa en $B_t(c)$, y si $t' \in (t, R)$, las funciones $f_{t'}^+$ y f_t^+ coinciden en $B_t(c)$, pues el integrando que las define es holomorfo en el disco $A_{t,t'}(z)$, y podemos usar el Lema 2.1. Podemos definir así una función $f^+ \in \mathscr{O}(A^+)$ que concide con f_t^+ en $B_t(c)$. Análogamente, podemos definir una función $f^- \in \mathscr{O}(A^-)$ mediante una fŕomula integral como en el enunciado del teorema. El Teorema 2.2 asegura que vale la igualdad $f = f^+ - f^-$ en A: si $z \in A$, basta que tomemos un anillo A' con clausura contenida en A y centro c que contiene a z, y aplicar tal teorema a f en A'. Por otro lado, la estimación estándar asegura que $f^-(\infty) = 0$.

Para ver la unicidad de f^+ y f^-, supogamos que $g^+ \in \mathscr{O}(A^+)$ y $g^- \in \mathscr{O}(A^-)$ son tales que $f = g^+ g^-$ en A. Entonces $g^+ - f^+ = f^- - g^-$ en A, y podemos definir una función entera $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de forma que

$$h = \begin{cases} g^+ - f^+ & \text{en } A^+, \\ f^- - g^- & \text{en } A^-, \end{cases}$$

Como $h(\infty) = 0$, h es constantemente 0 por el teorema de Liouville, que prueba que $g^+ = f^+$ y que $g^- = f^-$, como queríamos. ◀

II. Series de Laurent

De la misma manera que la fórmula de Cauchy en discos nos permite encontrar desarrollos en serie de potencias para funciones holomorfas en tales conjuntos, la fórmula integral de Cauchy en anillos nos permitirá encontrar desarrollos en ***series de Laurent*** para funciones holomorfas en este tipo de dominios: una serie de Laurent en torno a $c \in \mathbb{C}$ es una serie formal

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-c)^n$$

en potencias tanto positivas como negativas de $z - c$, compuesta de una ***parte regular*** y una ***parte principal***

$$f^+(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z-c)^n, \qquad f^-(z) = \sum_{n<0} a_n (z-c)^n,$$

respectivamente. Notemos que la parte regular de una serie de Laurent es una serie de potencias usual, mientras que la parte principal se obtiene al evaluar una serie de potencias usual en $(z-c)^{-1}$. En particular, toda serie de potencias es una serie de Laurent con parte principal nula.

Las series formales de Laurent forman una $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}[\![z, z^{-1}]\!]$ que contiene como subálgebras a las series formales $\mathbb{C}[\![z]\!]$, a los polinomios $\mathbb{C}[z]$, y a los ***polinomios de Laurent*** $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$, que no son otra cosa que series formales de Laurent con finitos términos. Si una serie de Laurent es de la forma

$$\sum_{m\geqslant n} a_n(z-c)^n$$

para algún $m \in \mathbb{Z}$ con $a_m \neq 0$, diremos que tiene orden m.

Teorema 2.4. *Si $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, f admite un desarrollo único en una serie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-c)^n \qquad \textit{donde} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_t(c)} \frac{f(\xi)}{(\xi-c)^{n+1}}d\xi$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ y cualquier $t \in (r,R)$, y tal serie converge normalmente a f en A.

Demostración. Sea $f = f^+ + f^-$ la descomposición de Laurent de f en A. La parte regular f^+ admite un desarrollo en serie

$$f^+(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-c)^n$$

que converge normalmente a f^+ en el disco A^+ por el Teorema de Representación. Por otro lado, si definimos $g : B'_{1/r}(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(z) = f^-(c+z^{-1}),$$

resulta g holomorfa, y además $\lim_{z\to 0} g(z) = f^-(\infty) = 0$, así g se extiende, de hecho, a una función holomorfa en $B_{1/r}(0)$ con $g(0) = 0$. Resulta que g tiene un desarrollo en serie de potencias en $B_{1/r}(0)$ de la forma

$$g(z) = \sum_{n>0} b_n z^n$$

que converge normalmente a g allí. Si escribimos $a_{-n} = b_n$ para $n > 0$ resulta que obtuvimos el desarrollo en serie de Laurent de f deseado:

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-c)^n,$$

y la convergencia es normal en A. Para ver la unicidad, es suficiente que probemos la fórmula para los coeficientes que dimos en el enunciado del teorema. Dado $m \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$(z-c)^{-m-1} f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-c)^{n-m-1},$$

y para $t \in (r,R)$, la convergencia normal permite que integremos la serie derecha sobre $\partial B_t(c)$ término a término, y en ese caso el único término que aparece es aquel con $n-m-1=-1$, y lo hace con valor $2\pi i a_n$, que da

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_t(c)} \frac{f(\xi)}{(\xi-c)^{m+1}} d\xi = a_m$$

para cada $m \in \mathbb{Z}$, como queríamos probar. ◂

Las series de Laurent nos proveen de otra forma de clasificar las singularidades aisladas de una función, mucho más útil en la práctica.

Teorema 2.5. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región y $c \in \Omega$, y sea $f : \Omega \smallsetminus c \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Supongamos que la serie de Laurent de f en un anillo $B'(c,r) \subseteq \Omega$ tiene parte principal*

$$p(z) = \sum_{n<0} a_n (z-c)^n.$$

Entonces c es

(1) *una singularidad evitable de f si y sólo si p es nula,*

(2) *un polo de orden m si y sólo si p es un polinomio de Laurent de orden m y,*

(3) *una singularidad esencial si y sólo si p es una serie con infinitos términos no nulos.*

Demostración. Si f tiene una singularidad evitable en c, su serie de Taylor en $B(c,r)$ coincide con su serie de Laurent en $B'(c,r)$, y luego la unicidad de la última prueba que p tiene que ser nula. Recíprocamente, si p es nula podemos extender f a una función holomorfa en $B(c,r)$ de forma que $f(c) = a_0$, que prueba (1). Para ver (2), notemos que si p es un polinomio de Laurent de orden m, entonces la Proposición 1.2 asegura que f tiene un polo de orden m en c. Recíprocamente, el corolario a esta misma proposición prueba que si f tiene un polo de orden m en c, f admite una representación en serie de Laurent con parte principal finita, y de orden m. La unicidad de la serie de Laurent de f prueba entonces que p es una serie finita de orden m. Finalmente, (3) se deduce de lo que acabamos de probar, pues una singularidad esencial existe exactamente cuando ni (1) ni (2) valen. ◂

III. Ejemplos

Es importante que notemos que, a diferencia de lo que sucede con las series de potencias, el desarrollo en serie de Laurent de una función en torno a un punto $c \in \mathbb{C}$ depende del anillo en torno a c que estemos considerando. Por ejemplo, el desarrollo en serie de Laurent de la función holomorfa $f : \mathbb{C} \smallsetminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z(1-z))^{-1}$ en $A_{0,1}(0)$ está dado por

$$\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 \cdots$$

mientras que su desarrollo en $A_{1,\infty}(0)$ es la serie de Laurent sin parte regular

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \cdots.$$

Por esta razón, si f es una función con una singularidad aislada en c, la serie de Laurent de f en torno a c *siempre* significará aquella obtenida en un disco perforado en torno a c.

En general, el desarrollo en serie de Laurent de una función racional se obtiene directamente de un desarrollo en fracciones simples. Por ejemplo, consideremos el punto $2i \in \mathbb{C}$, y el anillo $A_{1,3}(2i)$ que contiene a las singularidades i y $-i$ de f en su frontera. Si escribimos

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

esto da la separación de Laurent de f en tal disco, con parte regular y parte principal

$$f^+(z) = -\frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}, \qquad\qquad f^-(z) = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i},$$

respectivamente. Como hicimos en la demostración del Teorema 2.4, expandimos a la parte regular en potencias positivas de $z-2i$, para obtener

$$f^+(z) = \frac{1}{2i}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{-1}{3i}\right)^{n+1}(z-2i)^n,$$

y expandimosa la parte principal en potencias negativas de $z-2i$, obteniendo

$$f^-(z) = \frac{1}{2i}\sum_{n<0}\left(\frac{1}{i}\right)^{n+1}(z-2i)^n.$$

3. Funciones meromorfas

Como es costumbre, fijemos una región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ se dice ***meromorfa en*** Ω si existe P_f un subconjunto discreto de Ω tal que f es holomorfa en $\Omega \smallsetminus P_f$ y tal que cada punto de P_f es un polo de f —naturalmente, llamamos a P_f el ***conjunto de polos de*** f— donde f toma el valor ∞. En particular, $P_f = \varnothing$ exactamente cuando f es holomorfa en Ω. Notemos que como P_f es relativamente cerrado en Ω, es vacío, finito, o infinito y numerable. Escribimos $\mathscr{M}(\Omega)$ al conjunto de funciones meromorfas sobre Ω.

Proposición 3.1. *Las funciones meromorfas $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ son exactamente las funciones holomorfas $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$.*

Esta proposición permite que identifiquemos $\mathscr{M}(\Omega)$ con $\mathscr{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$ y $\mathscr{O}(\Omega)$ con el conjunto de funciones en $\mathscr{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$ finitas en todo punto.

Demostración. Recordemos que una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es holomorfa si para cada punto $c \in \Omega$ existe un disco B tal que o bien $f(B) \subseteq \mathbb{C}$ y $h = f|_B$ es holomorfa, o bien $f(B) \subseteq \mathbb{C}^* \smallsetminus 0$ y la función $1/h$ es holomorfa.

Sea $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^*$ meromorfa. Por (2) del Teorema 1.1, sabemos que f tiene un polo de orden m en c si y solamente si existe un entorno B de c y una función holomorfa nunca nula $g:B\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $f(z)=(z-c)^{-m}g(z)$ en B. Ciertamente entonces $f(B)\subseteq\mathbb{C}^*\smallsetminus 0$ y $1/f$ es holomorfa en B. Luego $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^*$ es holomorfa.

Supongamos, por otro lado, que $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^*$ holomorfa. Entonces el conjunto $f^{-1}(\infty)$ es discreto en Ω: para cada punto $c\in\Omega$ donde $f(c)=\infty$, existe un disco B tal que f no se anula en B y tal que la función $1/f$ es holomorfa en B. Como c es un cero de $1/f$ de orden m, en primer lugar c es un punto aislado de $f^{-1}(\infty)$ y, si escribimos $f(z)=(z-c)^m g(z)$ con $g(c)\neq 0$, queda en evidencia que c es un polo de orden m de f. Así f es, según nuestra definición, meromorfa. ◀

Notemos que, como f es holomorfa en la región $\Omega\smallsetminus P_f$, su conjunto de ceros Z_f es también discreto y numerable, y la función $g=1/f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^*$ es otra vez holomorfa, y cumple que $Z_g=P_f$ y que $P_g=Z_f$. Así la inversa multiplicativa de toda función meromorfa sobre una región es otra vez una función meromorfa. Por otro lado, ciertamente si $h\in\mathscr{M}(\Omega)$ entonces $f+h, fh\in\mathscr{M}(\Omega)$ y, más aún, $P_{f+h}, P_{fh}\subseteq P_f\cup P_h$. Resulta que la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathscr{M}(\Omega)$ es un cuerpo, que contiene a $\mathscr{O}(\Omega)$ como subálgebra.

Diremos que $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ es meromorfa en un punto $c\in\Omega$ si es meromorfa en un entorno B de c contenido en Ω. Por la Proposición 1.2, existe $m\in\mathbb{Z}$ y un desarrollo en serie

$$f(z)=\sum_{n\geqslant m}a_n(z-c)^n,$$

con $a_m\neq 0$. Llamamos a m el orden de f en c, y lo notamos $o_c(f)$; esta notación es consistente con la que usamos para el orden de f en una de sus raíces, esto es, extiende la función de orden $\mathscr{O}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{N}$ a una función $\mathscr{M}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{Z}$. Además las funciones holomorfas $\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ son exactamente las que tienen orden no negativo en cada punto de Ω. El lector puede verificar que si f y g están en $\mathscr{M}(\Omega)$, entonces para cada $c \in \Omega$,

$$o_c(fg) = o_c(f) + o_c(g), \qquad\qquad o_c(f+g) \geqslant \text{mín}(o_c(f), o_c(g))$$

con igualdad en el segundo caso siempre que $o_c(f) \neq o_c(g)$. Si acordamos que el orden de la función nula en cada punto de Ω es ∞, para cada $c \in \Omega$, la función $o_c : \mathscr{M}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ es una ***valuación discreta***, y hace de $\mathscr{M}(\Omega)$ un ***cuerpo de valuación discreta***. Tenemos también un teorema de identidad para funciones meromorfas:

Teorema 3.2. *Sean $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ meromorfas. Son equivalentes*

(1) $f = g$,

(2) El conjunto $\{z \in \mathbb{C}^* : f(z) = g(z)\}$ tiene un punto de acumulación en Ω,

(3) Existe $c \in \mathbb{C}^*$ que no es un polo de f ni de g tal que $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Basta que usemos el teorema de la identidad para la región $\Omega' = \Omega \smallsetminus (P_f \cup P_g)$ y las funciones holomorfas $f, g : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$. ◂

Ejercicio 3.1. ¿Por qué es Ω' también una región?

I. Funciones racionales

Ya vimos que dado un abierto Ω en $\mathbb{C}$, las funciones meromorfas allí son exactamente las funciones holomorfas $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Veamos ahora que

Proposición 3.3. *Las funciones holomorfas $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ son precisamente las funciones racionales.*

Demostración. Tomemos $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorfa. Así, en particular, la restricción $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es holomorfa, y luego tiene asociado su conjunto P_f de polos y su conjunto Z_f de ceros. Como f es holomorfa en ∞, tanto P_f como Z_f debe ser finitos. Además, si f tiene orden n en ∞, $z^n f(z)$ es holomorfa, finita y no nula en un entorno de ∞. Esto dice que existe una función racional r tal que $g = r^{-1}f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función entera nunca nula tal que $g(\infty) \in \mathbb{C}$, y luego por el teorema de Liouville g es constante, que prueba que f es racional. ◀

4. Residuos

I. Teorema de los Residuos

Fijemos una función meromorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Para cada singularidad $c \in \Omega$ de f, definimos el ***residuo de f en c*** por

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} f \, dz$$

donde B es un disco con centro c y clausura contenida en Ω que contiene a c como único punto singular de f, y lo notamos $\operatorname{Res}(f, c)$. Si el desarrollo de Laurent de f en B' es

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - c)^n$$

entonces $\operatorname{Res}(f, c) = a_{-1}$.

Proposición 4.1. *El residuo de f en c es el único número complejo λ tal que $f(z) - \lambda(z - c)^{-1}$ es integrable en un entorno perforado de c.*

Demostración. Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $g(z) = f(z) - \lambda(z - c)^{-1}$ es integrable en un entorno perforado de c. Entonces, integrando a g sobre el borde de un disco B suficientemente pequeño en torno a c, obtenemos

$$\int_{\partial B} f \, dz = 2\pi i \lambda$$

y $\lambda = \operatorname{Res}(f, c)$. Recíprocamente, si $\lambda = \operatorname{Res}(f, c)$ la función g tiene un desarrollo de Laurent en torno a c sin término $(z - c)^{-1}$, y podemos entonces integrarla término a término y obtener una primitiva de g. ◀

El siguiente teorema pone en evidencia el rol central de los residuos de funciones meromorfas en el cálculo de integrales.

Teorema 4.2. (Teorema de los Residuos) *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ meromorfa, y sea γ un lazo nulhomólogo en Ω que no pasa por ningún polo de f. Entonces el conjunto $A = P_f \cap \operatorname{Int}(\gamma)$ es finito y*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = \sum_{w\in A} \operatorname{Ind}(\gamma,w)\operatorname{Res}(f,w).$$

En general, la región Ω será un conjunto convexo o estelar, y entonces cualquier lazo allí resultará nulhomólogo.

Demostración. Como la traza de γ es compacta, podemos obtener un compacto $K \subseteq \Omega$ que es union de finitos discos cerrados que contiene a γ. De hecho, como el interior de γ está contenido en Ω[1] y como $\overline{\operatorname{Int}(\gamma)} \subseteq \operatorname{Int}(\gamma) \cup \gamma$, podemos elegir K para que cubra también a $\operatorname{Int}(\gamma)$. En tal compacto f tiene finitos polos y luego A es finito; digamos que $A = \{w_1, \dots, w_t\}$.

Para cada $i \in \{1,\dots,t\}$ sea $p_i(z) = \operatorname{Res}(f,w_i)(z-w_i)^{-1} + \tilde{p}_i(z)$ la parte principal del desarrollo de Laurent de f en torno a w_i, donde $\tilde{p}_i$ contiene los términos con potencias negativas de orden por lo menos dos de p_i. Cada p_i es holomorfa en $\mathbb{C} \smallsetminus \{w_i\}$ y cada $\tilde{p}_i$ admite una primitiva en tal conjunto. Además, la función

$$\tilde{f} = f - p_1 - \cdots - p_t$$

es holomorfa en un abierto Ω' que contiene a K, y γ es nulhomóloga en Ω' pues $\operatorname{Int}(\gamma) \subseteq K \subseteq \Omega'$. Así la integral de $\tilde{f}$ sobre γ es nula, y como cada $\tilde{p}_i$ admite una primitiva, resulta que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{t}\operatorname{Res}(f,w_i)\int_\gamma \frac{dz}{z-w_i} = \sum_{w\in A}\operatorname{Ind}(\gamma,w)\operatorname{Res}(f,w),$$

que es lo que queríamos probar. ◄

[1] Esto es cierto, pero requiere de una demostración.

En particular, si el lazo γ es simple, esto es, si $\text{Ind}(\gamma, w) = 1$ para todo $w \in \text{Int}(\gamma)$, obtenemos el siguiente resultado, que es el que usaremos más adelante cuando integremos sobre lazos simples como pueden serlo círculos, sectores circulares, rectángulos, polígonos y otras curvas similares.

Corolario 4.3. *Con las hipótesis y la notación del Teorema 4.2, si γ es un lazo simple, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = \sum_{w\in A} \text{Res}(f, w).$$

II. Cálculo de Residuos

Consideremos una función meromorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y veamos como podemos efectuar el cálculo de $\text{Res}(f, c)$ en algunos casos usuales. Si f tiene un polo simple en c, entonces

$$\text{Res}(f, c) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z)$$

pues f tiene parte principal $a_{-1}(z-c)^{-1}$. Más generalmente, si f tiene un polo de orden m en c entonces el mismo razonamiento muestra que

$$\text{Res}(f, c) = \lim_{z\to c}\left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1}\left[\frac{(z-c)^m f(z)}{(m-1)!}\right].$$

Si, por otro lado, f es un cociente g/h con g y h holomorfas en un entorno de c tal que $g(c) \neq 0$ y $h(c) = 0$, y si f tiene un polo simple en c —es decir, si $h'(c) \neq 0$, obtenemos usando lo anterior que

$$\text{Res}(f, c) = \frac{g(c)}{h'(c)}.$$

En general, si h es un polinomio con una raíz de orden m en c, podemos usar la fórmula que obtuivmos para el caso que f tiene un polo en c de orden m, pero si h es trascendente en c, esto puede resultar complicado. En este caso, podemos valernos la expansión en serie de h y g, como sigue.

Supongamos que h no se anula en c y que g lo hace con orden m, así

$$h(z) = \sum_{n\geqslant 0} h_n(z-c)^n \qquad\qquad g(z) = \sum_{n\geqslant 0} g_n(z-c)^{n+m}$$

y f tiene un polo de orden m en c. Queremos encontrar una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} f_n(z-c)^n$ tal que

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} h_n(z-c)^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n(z-c)^n\right) = \sum_{n\geqslant 0} g_n(z-c)^n.$$

y extraer el coeficiente $f_{m-1} = \operatorname{Res}(f,c)$. La igualdad anterior da una lista infinita triangular de ecuaciones,

$$\begin{aligned}
g_0 &= h_0 f_0 \\
g_1 &= h_1 f_0 + h_0 f_1 \\
g_2 &= h_2 f_0 + h_1 f_1 + h_0 f_2 \\
g_3 &= h_3 f_0 + h_2 f_1 + h_1 f_2 + h_0 f_3 \\
\vdots &= \qquad\qquad \ddots
\end{aligned}$$

Como $h_0 \neq 0$, podemos invertir este sistema inductivamente. De hecho, como la matriz infinita es triangular superior, el determinante de la menor principal m-ésima es h_0^m y usando la regla de Cramer resulta que

$$f_{m-1} = h_0^{-m} \begin{vmatrix} h_0 & 0 & 0 & \cdots & g_0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \cdots & g_1 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m-1} & h_{m-2} & h_{m-3} & \cdots & g_{m-1} \end{vmatrix}$$

es el residuo buscado. Finalmente, en el caso que f tenga una singularidad esencial, será en general necesario obtener la serie de Laurent de f en torno a c. El lema siguiente será útil más adelante.

Lema 4.4. *Supongamos que f es meromorfa en c y que g es holomorfa en c. Entonces*

(1) si f tiene un polo simple $\operatorname{Res}(fg,c)=\operatorname{Res}(f,c)g(c)$,

(2) si f tiene orden $m\in\mathbb{Z}$ en c, entonces f'/f tiene un polo simple en c y $\operatorname{Res}\big(gf'/f,c\big)=mg(c)$, y

(3) si f toma el valor $f(c)$ con multiplicidad m en c y si f y g son holomorfas en c, entonces

$$\operatorname{Res}\left(g\frac{f'}{f-f(c)},c\right)=mg(c).$$

Demostración. En el primer caso, fg tiene también un polo simple en c, y luego

$$\operatorname{Res}(fg,c)=\lim_{z\to c}(z-c)f(z)g(z)=\operatorname{Res}(f,c)g(c).$$

Para ver la segunda afirmación, escribamos $f(z)=(z-c)^m h(z)$ con $h(z)$ holomorfa en un entorno de c y $h(c)\neq 0$. Entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-c}+\frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Como el segundo sumando es holomorfo en un entorno de c, esto prueba que f'/f tiene un polo simple en c, y luego que $\operatorname{Res}\big(f'/f,c\big)=m$. Usando lo anterior concluímos que $\operatorname{Res}\big(gf'/f,c\big)=mg(c)$. Para ver la última afirmación, notemos que $f-f(c)$ tiene orden m en c, y apliquemos lo que acabamos de probar a esta función. ◄

III. Ejemplos

Ilustramos la discusión anterior con algunos ejemplos. Comencemos con el caso de polos simples, y para eso consideremos la función meromorfa

$$f(z)=\pi\cot\pi z=\pi\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z},$$

que tiene polos simples en cada entero $k \in \mathbb{Z}$. En este caso, sabemos que

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \pi \lim_{z\to k}(z-k)\cot z = \pi \frac{\cos(\pi k)}{\sin(\pi k)'} = 1$$

pues $(\sin \pi z)' = \pi \cos \pi z$. Resulta que si g es una función meromorfa que es holomorfa en $k \in \mathbb{Z}$, por el Lema 4.4 obtenemos que $\operatorname{Res}(fg, k) = g(k)$. Esto permite que usemos a f junto con el teorema del Residuo para obtener una representación integral

$$\sum_{|k|\leq n} g(k) = \frac{1}{2i}\int_\Gamma g(z)\cot \pi z \, dz$$

donde Γ es una curva simple cerrada en $\mathbb{C}$ que contiene a los enteros $-k, -k+1, \ldots, k-1, k$ en su interior y a los demás en su exterior. De forma análoga, la función

$$h(z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z = \frac{\pi}{\cos \pi z}$$

tiene residuo $(-1)^k$ en cada entero, y permitirá más adelante que evaluemos sumas alternadas

$$\sum_{|k|\leq n} (-1)^k g(k).$$

Consideremos ahora el caso de un polo de orden mayor. La función

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{(e^{2\pi i z}-1)^2}$$

tiene polos de orden 2 en los enteros, y podemos escribir

$$(e^{2\pi i z}-1)^2 = -4\pi^2 z^2 - 8\pi^3 i z^3 + O(z^4) = -(2\pi)^2 z^2 (1 + h(z))$$

donde $h(0) = 0$, $h'(0) = 2\pi i$. Usando esto, resulta que $\operatorname{Res}(f, 0) = -(2\pi i)^{-1}$. El lector puede hacer lo mismo para cada $k \in \mathbb{Z}$, y obtener que $\operatorname{Res}(f, k) = (-1)^{k+1}(2\pi i)^{-1}$.

Como ejemplo final, tomemos $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la función

$$f_n(z) = (1+z^n)^{-1}$$

que tiene un polo simple en cada raíz n-ésima de -1, y luego si ξ es una de ellas, como $\xi^{n-1} = -\xi^{-1}$, obtenemos

$$\operatorname{Res}(f_n, \xi) = \lim_{z\to\xi} \frac{z-\xi}{1+z^n} = \frac{1}{n\xi^{n-1}} = -\frac{\xi}{n}.$$

Resulta que si g es holomorfa en ξ y no se anula allí, tenemos que $\operatorname{Res}(f_n g, \xi) = -\xi g(\xi)/n$.

5. Enumeración de polos y ceros

Usando el Lema 4.4 y el Teorema de los Residuos, deducimos el siguiente resultado.

Teorema 5.1. *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ meromorfa no constante, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, y tomemos $w_0 \in \mathbb{C}$. Si γ es un lazo nulhomólogo en Ω que no corta a $P_f \cup f^{-1}(w_0)$, entonces*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\,dz = &\sum_{f(w)=w_0} \operatorname{Ind}(\gamma, w)\mu(f, w)g(w) \\ &+ \sum_{w\in P_f} \operatorname{Ind}(\gamma, w)o_w(f)g(w),\end{aligned}$$

donde la suma derecha involucra solo finitos términos.

En particular, tomando g como la identidad o la función constante 1, obtenemos los dos resultados siguientes:

Proposición 5.2. (Enumeración de polos y ceros) *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ meromorfa no constante, y tomemos $w_0 \in \mathbb{C}$. Si γ es un lazo simple nulhomólogo en Ω que no corta a $P_f \cup f^{-1}(w_0)$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\,dz = Z_f(\gamma, w_0) - P_f(\gamma)$$

donde $Z_f(\gamma, w_0)$ es el número de soluciones a $f(z) = w_0$ en el interior de γ, contadas con multiplicidad, y $P_f(\gamma)$ es el número de polos de f en el interior de γ, también contados con multiplicidad.

Demostración. Basta que notemos que como tomamos $g = 1$ y como γ es simple, por el Teorema 5.1 la integral en el enunciado de la proposición es igual a

$$\sum_{f(w)=w_0} \mu(f,w) + \sum_{w \in P_f} o_w(f)$$

donde para cada solución w a $f(w) = w_0$, el entero $\mu(f,w)$ es la multiplicidad con la que f toma el valor w_0 en w, y donde para $w \in P_f$, $o_w(f)$ es el orden de f en el polo w, que es el entero opuesto al orden del polo w de f. ◀

Proposición 5.3. (Inversión) *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorfa, y tomemos $w_0 \in \mathbb{C}$. Si γ es un lazo simple nulhomólogo en Ω que no corta a $P_f \cup f^{-1}(w_0)$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \sum_{f(w)=w_0} \mu(f,w) w$$

En particular, si f es biholomorfa en Ω y toma allí el valor w_0,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z) - w_0} dz = f^{-1}(w_0).$$

Notemos que la fórmula anterior da una expresión integral para la inversa de f.

Demostración. Como f es holomorfa P_f es vacío, y luego por el Teorema 5.1, la integral en el enunciado de la proposición es igual a

$$\sum_{f(w)=w_0} \mu(f,w) w.$$

Si además f es biholomorfa en Ω, f' no se anula en ningún punto de Ω, así $\mu(f,w) = 1$ para cada $w \in \Omega$. Más aún, $f(w) = w_0$ tiene una única solución en Ω, a saber, $f^{-1}(w_0)$. Esto da lo que queremos. ◀

I. El teorema de Rouché

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es holomorfa no constante y si γ es un lazo simple nulhomólogo en Ω que no pasa por ningún cero de f, la Proposición 5.2 dice que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = Z_f(\gamma)$$

donde $Z_f(\gamma)$ es el número de ceros de f en el interior de γ, contados con multiplicidad. El cálculo de una integral de esta forma es en general dificil, y suele depender, obviamente, de la disposición de los ceros de f en el interior de γ. El siguiente teorema, debido a Eugène Rouché (1832–1910), prueba que bajo ciertas condiciones el conocimiento de las disposición de los ceros de una funcion —que en general será fácil de obtener— da información sobre la disposición de los ceros de otra. Usaremos el siguiente lema para probarlo, que además deja en evidencia la naturalidad de la hipótesis del teorema.

Lema 5.4. *El semiplano cortado $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathbb{R}_{<0}\}$ es exactamente el conjunto de números complejos $z \in \mathbb{C}$ que cumplen que*

$$|z-1| < |z| + 1.$$

Demostración. Si elevamos ambos lados de la desigualdad al cuadrado, luego de reescribir obtenemos que la desigualdad es equivalente a que

$$0 < \Re z + |z|.$$

Pero siempre es cierto que $|\Re z| \leqslant |z|$, con igualdad si y sólo si $\Im z = 0$. Luego lo anterior es cierto siempre si $z \notin \mathbb{R}$, y en el caso que $z \in \mathbb{R}$, es cierto si, y solamente si, $z > 0$. Esto da lo que queríamos. ◀

Enunciamos y probamos ahora el ***teorema de Rouché***.

Teorema 5.5. *Sean $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas y sea γ un lazo simple nulhomólogo en Ω. Si $|f-g| < |f| + |g|$ sobre γ, entonces f y g tienen el mismo número de ceros en el interior de γ.*

Demostración. Como $|f-g|<|f|+|g|$ sobre γ, es el caso que f y g no se anulan sobre γ. Además, como γ es compacta, existe un entorno abierto U de γ donde f y g no se anulan, y podemos considerar la función holomorfa $h:U\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $h(z)=f(z)/g(z)$. Por hipótesis, $|h-1|<|h|+1$ en U, así, por el Lema 5.4, h toma valores en $\mathbb{C}^-$. Esto implica que está bien definida la función $\mathrm{Log}(h)$, y nos da una primitiva de $f'/f-g'/g$ sobre U. Deducimos entonces que

$$Z_f(\gamma)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g'(z)}{g(z)}dz=Z_g(\gamma),$$

que completa la demostración del teorema. ◂

La siguiente versión más débil del teorema de Rouché será, en general, suficiente para la mayoría de sus aplicaciones. La idea a tener en mente es que si f es pequeña comparada con g sobre γ, en el sentido que le da la desigualdad a seguir, entonces g y $f+g$ tienen el mismo número de ceros en el interior de γ.

Corolario 5.6. *Sean $f,g:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorfas y sea γ un lazo simple nulhomólogo en Ω. Si $|f|<|g|$ sobre γ, entonces g y $f+g$ tienen el mismo número de ceros en el interior de γ.*

Demostración. Las funciones $F=f+g$ y $G=g$ cumplen que $|F-G|<|G|\leqslant|F|+|G|$ sobre la curva γ, así la afirmación se sigue del teorema de Rouché. ◂

Podemos dar ahora otra demostración del teorema fundamental del Álgebra. Tomemos un polinomio no constante

$$p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$$

y sea $R=\text{máx}\{|a_0|,\dots,|a_{n-1}|,1\}$. Si $|z|>R$, entonces

$$|p(z)-z^n|\leqslant\sum|a_i||z|^i\leqslant R|z|^{n-1}<|z|^n.$$

Luego si tomamos γ el borde de un disco $B(0,r)$ con $r > R$, el corolario al teorema de Rouché asegura que z^n y p tienen el mismo número de ceros en $B(0,r)$. Dado que z^n tiene n ceros (contados con multiplicidad), lo mismo es cierto para p.

Notemos que si γ es un lazo simple nulhomólgo en Ω y si f es holomorfa y no se anula sobre γ, entonces $\gamma_f = f \circ \gamma$ es un lazo en $\mathbb{C}$ y, por un simple cambio de variables, tenemos que

$$Z_f(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_f} \frac{d\xi}{\xi} = \operatorname{Ind}(\gamma_f, 0).$$

Esto nos da, por un lado, una nueva interpretación de la fórmula de enumeración de ceros de una función holomorfa y, segundo, una

Segunda demostración del teorema de Rouché. Veamos que las hipótesis del teorema aseguran que las curvas γ_f y γ_g son homotópicas en $\mathbb{C}^\times$, por lo que la invarianza homotópica del índice prueba lo que queremos. Afirmamos que para cada t la curva

$$\gamma_t(s) = t\gamma_f(s) + (1-t)\gamma_g(s)$$

no pasa por el origen. En efecto, si esto fuera falso para algún par (s_0, t_0), tendría que ser el caso que $t_0 \in (0,1)$, pues ni γ no corta a $Z_f \cup Z_g$, y luego obtendríamos que

$$\frac{\gamma_f(s)}{\gamma_g(s)} = \frac{t}{t-1} < 0,$$

pero esto contradice que γ_f/γ_g toma valores en $\mathbb{C}^-$. Deducimos que la familia de curvas γ_t es una homtopía de lazos de γ_f a γ_g en $\mathbb{C}^\times$, por lo que $\operatorname{Ind}(\gamma_f, 0) = \operatorname{Ind}(\gamma_g, 0)$, como queríamos probar. ◂

Referencias

[1] Reinhold Remmert, *Theory of complex functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the second German edition by Robert B. Burckel; Readings in Mathematics. MR1084167

[2] Einar Hille, *Analytic function theory. Vol. 1*, Introduction to Higher Mathematics, Ginn and Company, Boston, 1959. MR0107692