Series de potencias y modos de convergencia

Pedro Tamaroff

1. El álgebra de series de potencias

I. Series formales

Una ***serie de potencias formal*** con coeficientes complejos es una expresión $f = \sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu X^\nu$ donde (a_ν) es una sucesión en $\mathbb{C}$, y notamos por $\mathbb{C}[\![X]\!]$ al conjunto de series de potencias formales con coeficientes complejos. Solemos decir que (a_ν) es el ***término general*** de f —está claro que una serie formal está unívocamente determinada por su término general. Si $f = \sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu X^\nu$ y $g = \sum_{\nu \geqslant 0} b_\nu X^\nu$ son series de potencias, llamamos a la serie con término general $(a_\nu + b_\nu)$ la ***suma de f y g*** y la notamos $f + g$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, llamamos a la serie con término general (λa_ν) el ***producto escalar de λ con f***, y lo notamos λf. Estas dos operaciones le dan a $\mathbb{C}[\![X]\!]$ una estructura de $\mathbb{C}$ espacio vectorial.

Las series de potencias formales pueden multiplicarse de forma completamente análoga a los polinomios: dadas dos series $f = \sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu X^\nu$ y $g = \sum_{\nu \geqslant 0} b_\nu X^\nu$, definimos el ***producto de f con g*** como la serie con término general (c_ν) donde

$$c_\nu = a_0 b_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \cdots + a_{\nu-1} b_1 + a_\nu b_0,$$

y lo notamos fg. Con las dos operaciones anteriores y esta multiplicación, que es conmutativa, $\mathbb{C}[\![X]\!]$ es una ***$\mathbb{C}$-álgebra***, esto es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial munido de un producto $\mathbb{C}$-bilineal y asociativo, con unidad la serie con término general $a_0 = 1$ y $a_\nu = 0$ si $\nu > 0$. Además, el álgebra de polinomios $\mathbb{C}[X]$ es una subálgebra, pues el producto y la suma de dos polinomios es otra vez un polinomio. El siguiente lema prueba que toda serie formal cuyo coeficiente independiente es no nulo admite una inversa para el producto de series.

Lema 1.1. *Sea $f = \sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu X^\nu$ una serie de potencias formal. Entonces existe una serie de potencias g tal que $fg = gf = 1$ si, y solamente si, $a_0 \neq 0$. En este caso, tal serie es única.*

Demostración. Supongamos primero que existe tal serie g, y que su primer término es b_0. De $fg = 1$ obtenemos que $a_0 b_0 = 1$, así $a_0 \neq 0$. Si, por otro lado, vale esta condición, podemos asumir que $a_0 = 1$. Escribamos a f como $f = 1 - \sum\limits_{\nu \geqslant 0} f_\nu X^\nu$ donde $f_\nu = -a_\nu$ para cada $\nu > 0$. Si existe $g = \sum_{\nu\geqslant 0} b_\nu X^\nu$ que cumple la condición del lema, entonces la serie $fg = \sum_{\nu \geqslant 0} c_\nu X^\nu$ es tal que $c_0 = s_0 t_0 = 1$, así $t_0 = 1$, y $c_\nu = 0$ si $\nu > 0$. Escribiendo esto explícitamente, obtenemos que si $\nu > 0$,

$$b_\nu = f_1 b_{\nu-1} + \cdots + f_{\nu-1} b_1 + b_\nu,$$

que define inductivamente b_ν en términos de b_j para $1 \leqslant j < \nu$. Esto prueba tanto la existencia como la unicidad de g. ◂

La serie g del lema se llama la ***inversa de f*** y la notamos f^{-1}, decimos en este caso que f es ***inversible***.

Corolario 1.2. *Toda serie de potencias formal no nula f admite una expresión única en la forma $f = z^\mu h$ donde h es una serie formal inversible y $\mu \geqslant 0$. Además, f es inversible si y solamente si $\mu = 0$.*

El número natural μ se llama el ***orden de f*** y lo notamos $o(f)$. Por convención, el orden de la serie nula es ∞.

Demostración. Dado que f es no nula, existe un primer natural μ tal que $a_\mu \neq 0$. En este caso z^μ es un factor de f y si escribimos $f = z^\mu h$, el término independiente de la serie h es $a_\mu \neq 0$, así es inversible. La unicidad de μ está clara, y esto da la de h. ◂

II. Radio de convergencia de una serie

En lo que sigue fijamos una serie de potencias $f(z) = \sum_{\nu\geqslant 0} a_\nu z^\nu$. Definimos el ***radio de convergencia*** de f como el supremo del conjunto $\{t \geqslant 0 : |a_\nu| t^\nu \text{ es acotada}\}$, y lo notamos R_f. Observemos que R_f puede tomar cualquier valor entre 0 e ∞. Veamos que este número es la elección apropiada de un “radio de convergencia”. Comenzamos con un lema preliminar.

Lema 1.3. *(Abel) Si existe una constante positiva s tal que la sucesión $(|a_\nu|s^\nu)$ se mantiene acotada, la serie f converge absolutamente en cualquier disco centrado en el origen y de radio menor a s.*

Demostración. Dado $0 < r < s$, sea $q = rs^{-1}$. Entonces $0 < q < 1$, y si M es una constante tal que $|a_\nu|s^\nu \leqslant M$ para todo $\nu \geqslant 0$, deducimos que

$$|a_\nu|r^\nu = |a_\nu|s^\nu q^\nu \leqslant Mq^\nu$$

para todo número natural ν. Como la serie geométrica de parámetro q converge, lo mismo es cierto para la serie con término general $|a_\nu|r^\nu$, como queríamos. ◀

Del lema anterior, deducimos que si f converge para algún z_0 no nulo, converge en todo punto del disco $B(0,|z_0|)$. Además, ahora es claro el siguiente resultado, que afirma que $B(0,R_f)$ es el disco abierto más grande donde f converge. Lo llamamos el ***disco de convergencia*** de f.

Teorema 1.4. *La serie f converge absolutamente en $B(0,R_f)$ y diverge en todo punto fuera de $\overline{B}(0,R_f)$. Además, ${R_f}^{-1}$ es igual al límite superior de la sucesión $(|a_\nu|^{1/\nu})$.*[1]

Demostración. La primera afirmación se sigue inmediatamente del lema, así que resta ver la validez de la segunda. Para esto, pongamos $S_f = \operatorname{lím\,sup}_{\nu\to\infty}(|a_\nu|^{1/\nu})$ y veamos que $S_f^{-1} = R_f$.

Supongamos primero que R_f es infinito. Entonces para todo $t > 0$ la sucesión $\{|a_\nu|t^\nu\}$ se mantiene acotada. Ahora, si $M > 0$ es una constante, $M^{1/\nu} \to 1$, y de esto y lo anterior deducimos que $\operatorname*{lím\,sup}_{\nu\to\infty} |a_\nu|^{1/\nu} t \leqslant 1$ para todo $t > 0$, y luego debe ser el caso que $S_f = 0$. Si, por otro lado, $R_f = 0$, entonces podemos construír una sucesión $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \cdots$ de naturales tal que $|a_{\nu_j}| \geqslant j^{\nu_j}$ por lo que $\operatorname{lím} |a_{\nu_j}|^{1/\nu_j} \to \infty$, y luego $S_f = \infty$.

Podemos considerar ahora el caso que S_f es finito y positivo. Por lo anterior, lo mismo debe ser cierto para R_f. Supongamos que $t < S_f^{-1}$. Entonces existe un natural N tal que si $\nu \geqslant N$ tenemos $|a_\nu|^{1/\nu} \leqslant t^{-1}$, y

[1] Por convención, $0^{-1} = \infty$ y $\infty^{-1} = 0$.

luego la sucesión $(|a_\nu| t^\nu)$ se mantiene acotada. Así, $t \leqslant R_f$. Esto prueba que $S_f^{-1} \leqslant R_f$.

Supongamos, por otro lado, que $t > S_f^{-1}$ y tomemos $t > s > S_f^{-1}$. Entonces podemos construír una sucesión $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \cdots$ de naturales tal que $|a_{\nu_j}| \geqslant s^{-\nu_j}$, y luego la sucesión $(|a_{\nu_j}| s^{\nu_j})$ está acotada inferiormente por 1. Si ahora $q = ts^{-1} > 1$, obtenemos que $|a_{\nu_j}| t^{\nu_j} \geqslant q^{\nu_j}$ para cada j. Resulta que la sucesión $(|a_\nu| t^\nu)$ no se mantiene acotada. Esto prueba que $S_f^{-1} \geqslant R_f$, y completa la demostración del teorema. ◀

La última afirmación del teorema anterior se debe a Cauchy y Hadamard. El cálculo de R_f se fácilita con el siguiente ***criterio del cociente de D'Alambert***. Dejamos su prueba al lector, con la indicación que intente imitar la demostración del teorema anterior.

Proposición 1.5. *Supongamos que la sucesión $(a_\nu)_{\nu \geqslant 0}$ es eventualmente no nula. Si existe $\lim_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|$ entonces es igual a R_f. Más precisamente, vale que*

$$\liminf_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \leqslant \liminf_{\nu\to\infty} |a_\nu|^{1/\nu} \leqslant \limsup_{\nu\to\infty} |a_\nu|^{1/\nu} \leqslant \limsup_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|.$$

Para poner en uso el resultado anterior, fijemos un número complejo σ, y pongamos para todo natural ν,

$$\binom{\sigma}{\nu} = \frac{\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-\nu+1)}{\nu(\nu-1)\cdots 1},$$

que llamamos un ***coeficiente binomial***. Notemos que si σ es natural, este número coincide con $\dfrac{\sigma!}{k!(\sigma-k)!}$. Definimos la ***serie binomial de parámetro σ*** por

$$b_\sigma(z) = \sum_{\nu \geqslant 0} \binom{\sigma}{\nu} z^\nu.$$

Por lo anterior, si σ es natural entonces b_σ es un polinomio, a saber, $(1+z)^\sigma$. Si σ no es natural, es una serie infinita, pues $\binom{\sigma}{\nu}$ no se anula nunca en ese caso.

Proposición 1.6. *Si σ no es natural la serie b_σ tiene radio de convergencia* 1.

Demostración. Ya notamos que si σ no es natural la sucesión de coeficientes es nunca nula. Calculamos los cocientes sucesivos de b_σ:

$$\frac{\binom{\sigma}{\nu}}{\binom{\sigma}{\nu+1}} = \frac{\nu+1}{\sigma-\nu},$$

de dónde deducimos que $\lim_{\nu\to\infty} |a_\nu / a_{\nu+1}| = 1$. Por el criterio de D'Alambert, el radio de convergencia de b_σ es 1, como se dijo. ◀

III. El álgebra de series convergentes

Definimos el ***conjunto de series de potencias convergentes*** como el conjunto de series formales con radio de convergencia positivo y lo notamos por $\mathbb{C}\{X\}$. Dado que si f y g son series convergentes y si $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos que

1. $R_{f+g} \geqslant \min\{R_f, R_g\}$,
2. $R_{\lambda f} = R_f$ si $\lambda \neq 0$,

tal conjunto es un subespacio de $\mathbb{C}[\![X]\!]$. La siguiente descripción alternativa de $\mathbb{C}\{X\}$, interesante en si misma, será una herramienta útil en lo que sigue.

Proposición 1.7. *El conjunto $\mathbb{C}\{X\}$ coincide con*

$$\left\{ f = \sum_{\nu\geqslant 0} a_\nu X^\nu : |a_\nu| \leqslant s^\nu \text{ eventualmente para algún } s > 0 \right\}.$$

Así, las series de potencias convergentes son precisamente aquellas con coeficientes *subgeométricos*.

Demostración. Queda como ejercicio al lector con la sugerencia que use el lema de Abel, que ya demostramos. ◀

Proposición 1.8. *Sean f y g series de potencias convergentes. Entonces*

1. *El producto formal fg es también una serie convergente.*

2. *Si f tiene una inversa formal, esta inversa es, de hecho, una serie de potencias convergente.*

Demostración. Notemos que lo primero afirma que $\mathbb{C}\{X\}$ es una subálgebra de $\mathbb{C}[\![X]\!]$. Escribamos $f = \sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu X^\nu$ y $g = \sum_{\nu \geqslant 0} b_\nu X^\nu$. Por la Proposición 1.7 podemos asumir que existe $s > 0$ tal que $\max\{|a_\nu|, |b_\nu|\} \leqslant s^\nu$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. El término general del producto fg es $c_\nu = \sum_{i=0}^{\nu} a_i b_{\nu-i}$, así podemos hacer la estimación

$$|c_\nu| \leqslant \sum_{i=0}^{\nu} |a_i||b_{\nu-i}| \leqslant \sum_{i=0}^{\nu} s^i s^{\nu-i}| \leqslant (\nu+1)s^\nu \leqslant (2s)^\nu,$$

que prueba que fg está en $\mathbb{C}\{X\}$.

Supongamos ahora que $a_0 \neq 0$. Como antes, podemos asumir que a_0 es 1, y escribir $f = 1 - \sum_{\nu \geqslant 0} f_\nu X^\nu$. Por lo que ya hicimos, sabemos que el término general (b_ν) de la inversa de f cumple que $b_0 = 1$ y la relación de recurrencia

$$b_\nu = f_1 b_{\nu-1} + \cdots + f_{\nu-1} b_1 + f_\nu.$$

En particular $b_1 = f_1 = -a_1$. Supongamos que $|a_\nu| \leqslant s^\nu$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Si asumimos, inductivamente, que $|b_i| \leqslant (2s)^i$ para $0 \leqslant i < \nu$, obtenemos que

$$|b_\nu| \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} |f_i||b_{\nu-i}| \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} s^i 2^{\nu-i} s^{\nu-i} \leqslant (2s)^\nu$$

pues $\sum_{i=1}^{\nu} 2^{\nu-i} = 2^\nu - 1$. Resulta entonces que f^{-1} tiene también radio de convergencia positivo, como queríamos. ◀

Notemos que, en general, no hay relación entre el radio de f y su inversa. Por ejemplo, la serie geometrica tiene inversa $1 - X$, que tiene radio de convergencia infinito, mientras que ella tiene radio de convergencia 1. Por otro lado, la serie exponencial y su inversa tiene ambas radio de convergencia infinito.

Corolario 1.9. *Sea f una serie de potencias convergente no nula. Entonces se escribe de forma única como $f = z^{o(f)} h$ donde h es una serie de* *potencias convergente inversible.*

Demostración. Esto sólo es la versión del Corolario 1.2 en el caso que f pertenece a $\mathbb{C}\{X\}$. ◂

Ejercicio 1.1. Probar que si f y g son series de potencias no nulas con radio de convergencia positivo y si h es otra serie de potencias tal que $fh = g$, entonces h tiene radio de convergencia positivo. *Sugerencia:* ¿ Por qué puede asumir que f es inversible?

2. Derivación e integración de una serie

Escribamos f' a la serie de potencias que se obtiene de derivar formalmente cada término de la serie f, y F a la serie de potencias que se obtiene de integrar formalmente cada término de la serie f, así

$$f' = \sum_{\nu\geqslant 0} \nu a_\nu z^\nu, \qquad F = \sum_{\nu\geqslant 0} a_\nu \frac{z^{\nu+1}}{\nu+1},$$

y las llamamos la ***derivada formal*** y la ***integral formal*** de la serie de potencias f, respectivamente.

Proposición 2.1. *El radio de convergencia de f' y el de F son iguales, y coinciden con el de f.*

Estamos probando, una vez más, que el álgebra $\mathbb{C}\{X\}$ es estable bajo operaciones usuales que hacemos sobre series formales, y luego que no hay realmente peligro en tratarlas como series formales, después de todo.

Demostración. Como $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{\nu}{\nu+1} = 1$, deducimos por la desigualdad de D'Alambert que $\lim\limits_{\nu\to\infty} \nu^{1/\nu} = 1$. Así que la igualdad $R_f = R_{f'}$ se sigue inmediatamente de la fórmula de Cauchy–Hadamard, mientras que $R_F = R_f$ porque $F' = f$. ◂

Ejercicio 2.1. Sea $t > 0$. Probar que $(|a_\nu|t^\nu)$ es acotada si $(\nu|a_\nu|t^{\nu-1})$ es acotada, y que si $0 < s < t$ y si $(|a_\nu|t^\nu)$ es acotada, entonces $(\nu|a_\nu|s^{\nu-1})$ es acotada, para dar una nueva demostración de la última proposición.

Como ejemplo, veamos que, al menos formalmente, $b'_\sigma = \sigma b_{\sigma-1}$. De la definición del coeficiente binomial, obtenemos que $\frac{\nu}{\sigma}\binom{\sigma}{\nu} = \binom{\sigma-1}{\nu-1}$, y entonces

$$b'_\sigma = \sum_{\nu\geqslant 1} \nu \binom{\sigma}{\nu} z^{\nu-1} = \sum_{\nu\geqslant 1} \sigma \binom{\sigma-1}{\nu-1} z^{\nu-1} = \sigma b_{\sigma-1},$$

que prueba lo que queríamos.

Veamos ahora que f define una función holomorfa en su disco de convergencia $B = B(0, R_f)$.

Proposición 2.2. *La función $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y su derivada es la función que define f' en B, es decir, la serie de potencias que se obtiene derivando término a término a la serie f.*

Demostración. Fijemos un número complejo $w \in B$, y tomemos z en B, así existe $s < R_f$ tal que $|w|, |z| < s$. Recordemos que para cualquier natural ν vale que

$$\frac{z^\nu - w^\nu}{z - w} = z^{\nu-1} + z^{\nu-2} w + \cdots + z w^{\nu-2} + w^{\nu-1},$$

y notemos a este polinomio $q_\nu(z)$, así en particular $q_0(z) = 0$ y $q_1(z) = 1$. Entonces resulta que

$$f(z) = f(w) + (z - w) \sum_{\nu\geqslant 1} a_\nu q_\nu(z).$$

Además, como $q_\nu(w) = \nu w^{\nu-1}$, al menos es cierto que $f'(w) = f_1(w)$ donde $f_1(z) = \sum_{\nu\geqslant 1} a_\nu q_\nu(z)$. Para ver que f es derivable en w y su derivada es $f'(w)$, es suficiente que verifiquemos que $f_1(z)$ es continua en B. Pero si $|z|, |w| < s$, podemos dar la cota $|q_\nu(z)| \leqslant \nu s^{\nu-1}$, y luego

$$\sum_{\nu\geqslant 1} |a_\nu| |q_\nu(z)| \leqslant \sum_{\nu\geqslant 1} |a_\nu| \nu s^{\nu-1} < \infty,$$

pues ya verificamos que f y f' tienen el mismo radio de convergencia. Por el criterio de Weiertrass, deducimos que $f_1(z)$ es límite uniforme de funciones continuas en $B(0, s)$, así que es ella misma continua en ese disco. Como cualquier punto de $B(0,R_f)$ está en alguno de esos disco, esto completa la demostración. ◀

De lo anterior se desprende que f es infinitamente derivable en su disco de convergencia, pues su derivada es también una serie de potencias, definida en el mismo disco que f, y que para cada natural ν,

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}.$$

Así, por ejemplo, sabemos ahora que las series

$$\ell(z) = \sum_{\nu \geqslant 0} (-1)^\nu \frac{z^\nu}{\nu}, \qquad u(z) = \sum_{\nu \geqslant 0} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1}, \qquad b_\sigma(z)$$

definen todas funciones holomorfas en el disco unidad.

Ejercicio 2.2. Verificar que la ecuación $b_\sigma(z) = \exp(\sigma \ell(z))$ es válida en el disco unidad. *Sugerencia:* pruebe que la derivada de alguna función apropiada es nula.

3. Composición de series de potencias

Sean $f = \sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu X^\nu$ y $g = \sum_{\nu \geqslant 0} b_\nu X^\nu$ series de potencias formales. Queremos definir una nueva serie formal, $f \circ g$, que se obtenga de "sustituir $X = g(Y)$ en f". Consideremos el caso que $f = g = \sum_{\nu \geqslant 0} X^\nu$. Si sustituímos a f en ella misma, cada término f^ν tiene un coeficiente independiente igual a 1, y no tiene sentido sumarlos para obtener el coeficiente independiente de $f \circ f$.

La forma de solucionar esta patología es suponer que $o(g) \geqslant 1$. En tal caso, la serie g^ν involucrará sólo términos de órden por lo menos ν, y luego en el cálculo de cada término de $f \circ g$ se verán involucrados sólo *finitos* términos de f y g. En efecto, en tal caso para cada número natural

N es

$$g^N = \sum_{\nu \geqslant N} b_\nu(N) X^\nu \qquad \text{dónde} \qquad b_\nu(N) = \sum_{i_1+\cdots+i_N=\nu} b_{i_1}\cdots b_{i_N}.$$

Ahora calculamos formalmente,

$$\begin{aligned} f(g(X)) &= \sum_{N\geqslant 0} a_N g^N \\ &= \sum_{N\geqslant 0} a_N \sum_{\nu\geqslant N} b_\nu(N)X^\nu \\ &= \sum_{\nu\geqslant 0}\sum_{N\leqslant \nu} a_N b_\nu(N) X^\nu \\ &= \sum_{\nu\geqslant 0} d_\nu X^\nu \end{aligned}$$

Definimos entonces la ***sustitución de g en f***, que notamos $f\circ g$, como la serie de potencias formal con término general $d_\nu = \sum_{N\leqslant\nu} a_N b_\nu(N)$. Recordemos que esto está definido *sólo* en el caso que $o(g) \geqslant 1$.

Proposición 3.1. *Supongamos que f y g tienen radio de convergencia positivo. Entonces lo mismo es cierto para $f\circ g$, y la función que define en su disco de convergencia coincide con la composición de f con g.*

Demostración. Escribamos B_f y B_g a los discos de convergencia de f y g, respectivamente. Como $g(0) = 0$, existe un disco $B' \subseteq B_g$ tal que $g(B') \subseteq B_f$. Esto asegura que la composición de f con g está definida. Más aún, como g converge absolutamente en B', podemos elegir B' de modo que para algún $r < R_f$, es $\sum_{\nu\geqslant 0} |b_\nu||z^\nu| < r$ para cada $z \in B'$.

Notemos ahora que todo los pasos que hicimos al evaluar $f(g(X))$ formalmente hasta llegar a nuestra definición de $f\circ g$ son válidos en el caso que $f(g(z))$ converja salvo, posiblemente, el intercambio en el orden suma que hicimos en el anteúltimo paso. En vista del Lema 4.2, es suficiente que verifiquemos que

$$\sum_{\nu\geqslant 0}\sum_{N\leqslant\nu} |a_\nu||b_N(\nu)||z|^\nu < \infty$$

cuando $z \in B'$. Ahora, tenemos la estimación

$$|b_N(\nu)| \leqslant |b|_N(\nu) \qquad \text{donde} \qquad |b|_\nu(N) = \sum_{i_1+\cdots+i_N=\nu} |b_{i_1}|\cdots|b_{i_N}|$$

y, volviendo atrás sobre nuestros pasos, tenemos que

$$\sum_{\nu\geqslant 0}\sum_{N\leqslant \nu} |a_\nu||b|_N(\nu)||z|^\nu = \sum_{\nu\geqslant 0} |a_\nu| \left(\sum_{\mu\geqslant 1} |b_\mu||z|^\mu\right)^\nu < \infty,$$

pues $\sum_{\mu\geqslant 1} |b_\mu||z|^\mu < r$. ◀

La demostración anterior pone en evidencia que si no asumimos que g tiene orden por lo menos uno pero que tal bola B' existe, tiene sentido sustituir g en f, teniendo ahora en cuenta que los coeficientes de esta serie están sujetos a condiciones de sumabilidad. Para que tal bola exista es suficiente, por ejemplo, que $g(0) < R_f$.

Ejercicio 3.1. Probar que los primeros términos de la sustitución de $e^z - 1$ en e^z están dados por $B_n/n!$ donde B_n es la sucesión

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, \ldots$$

y encontrar los primeros nueve términos de la serie inversa a $z^{-1}(e^z - 1)$.

4. Las series de potencias son analíticas

Sea Ω una región en $\mathbb{C}$ y $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que g es ***analítica*** si para cada punto $c \in \Omega$ existe un disco abierto no vacío B con centro c y una serie de potencias

$$\sum a_\nu (z-c)^\nu$$

que converge en B a g. En este caso g es holomorfa, pues coincide localmente con una función holomorfa en virtud del Teorema 2.2. Luego

Proposición 4.1. *Toda función analítica en una región es holomorfa allí.*

Veamos ahora que toda serie de potencias es analítica en su disco de convergencia. Usaremos el siguiente lema sobre el intercambio del orden de una suma, que no probaremos. El lector puede encontrar una demostración y un tratamiento en detalle de series dobles en [3, Capítulo 8, Sección 21].

Lema 4.2. *Sea (A_{ij}) una sucesión en $\mathbb{C}$ indexada por $\mathbb{N}^2$, y supongamos que la serie doble $\sum_{\mu\geqslant 0}\sum_{\nu\geqslant 0}|A_{\nu\mu}|$ es finita. Entonces la serie doble*

$$\sum_{\nu\geqslant 0}\sum_{\mu\geqslant 0}|A_{\nu\mu}|$$

también es finita, y

$$\sum_{\nu\geqslant 0}\sum_{\mu\geqslant 0}A_{\nu\mu}=\sum_{\mu\geqslant 0}\sum_{\nu\geqslant 0}A_{\nu\mu}.$$

Teorema 4.3. *La función $f:B\longrightarrow\mathbb{C}$ es analítica y para cada $c\in B$ admite un desarrollo en serie de potencias en $B(c,d_c)$, dónde d_c es la distancia de c al borde de B.*

Demostración. Para cada ν natural podemos escribir,

$$z^\nu=(z-c+c)^\nu=\sum_{j\leqslant\nu}\binom{\nu}{j}(z-c)^j c^{\nu-j}$$

y luego

$$f(z)=\sum_{\nu\geqslant 0}\sum_{j\leqslant\nu}\binom{\nu}{j}a_\nu(z-c)^j c^{\nu-j}.$$

Notemos que para cada $j\in\mathbb{N}$ la serie $b_j=\sum_{\nu\geqslant j}\binom{\nu}{j}c^{\nu-j}$ converge, pues no es otra cosa que $f^{(j)}(c)/j!$. Tendríamos completa la demostración, entonces, si quedara justificado el intercambio en el orden de las dos sumas en lo que sigue:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\nu \geqslant 0} \sum_{j \leqslant \nu} \binom{\nu}{j} a_\nu (z-c)^j c^{\nu-j} \\ &= \sum_{j \geqslant 0} \sum_{\nu \geqslant 0} \binom{\nu}{j} a_\nu c^{\nu-j} (z-c)^j \\ &= \sum_{j \geqslant 0} b_j (z-c)^j. \end{aligned}$$

Podemos tomar ahora z en un disco $B(c,\delta)$ con clausura contenida en B. En particular $r = |z-c| + |c| < R_f$, y entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \geqslant 0} \sum_{j \leqslant \nu} \binom{\nu}{j} |a_\nu||z-c|^j |c|^{\nu-j} &= \sum_{\nu \geqslant 0} |a_\nu|(|z-c|+|c|)^\nu \\ &= \sum_{\nu \geqslant 0} |a_\nu| r^\nu < \infty, \end{aligned}$$

por lo que el lema anterior dice que este intercambio es válido. Esto completa la demostración, y prueba además que el desarrollo obtenido en torno a c converge en cualquier disco abierto $B(c,\delta)$ con clausura contenida en B. ◀

5. Modos de convergencia

En lo que sigue, fijamos una región Ω en $\mathbb{C}$, y escribimos $\mathscr{C}(\Omega)$ y $\mathscr{O}(\Omega)$ a los conjuntos de funciones continuas y holomorfas en Ω, respectivamente. Dada $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ y un subconjunto A de Ω, escribimos $|f|_A$ al supremo de f en A. Recordemos que el límite uniforme de funciones continuas es continua, y que *el criterio de Weierstrass* afirma que si (f_ν) es una sucesión en $\mathscr{C}(\Omega)$ y si $\sum |f_\nu|_A < \infty$ para algún subconjunto A de Ω, entonces la serie $f = \sum f_\nu$ converge uniformemente en A y define allí una función continua, visto que las sumas parciales de f tienden a ella uniformemente, y son funciones continuas en A. Con estas ideas, definimos dos modos de convergencia en $\mathscr{C}(\Omega)$ que resultan ser buenos para nuestros fines, en un sentido que haremos preciso más adelante.

Definición 1. Una sucesión (f_n) en $\mathscr{C}(\Omega)$ converge de forma *localmente uniforme* en Ω a $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ si todo punto $z \in \Omega$ admite un entorno abierto U tal que $f_n|_U$ converge uniformemente a $f|_U$.

Como el límite uniforme de funciones continuas es continua, y la continuidad es una propiedad local, si (f_n) es una sucesión en $\mathscr{C}(\Omega)$ que converge de forma localmente uniforme a f, resulta que f también pertenece a $\mathscr{C}(\Omega)$. Puede probarse que esta noción de convergencia proviene de una métrica en $\mathscr{C}(\Omega)$, y que con esta métrica $\mathscr{C}(\Omega)$ resulta un espacio métrico completo.

Veremos más adelante que el límite localmente uniforme de funciones en $\mathscr{O}(\Omega)$ está en $\mathscr{O}(\Omega)$ —en este sentido, esta noción de convergencia es buena: el subespacio de funciones holomorfas es cerrado respecto a ella, y entonces también completo. Por el momento, consideremos un ejemplo.

Ejercicio 5.1. Supongamos que en la definicion de convergencia localmente uniforme reemplazamos la condicion de que U sea abierto por la condición de que sea *compacto*. Probar que esta nueva noción de convergencia, que llamamos convergencia compacta, coincide con la de convergencia localmente uniforme.

Proposición 5.1. *Sea* $\Omega_0 = \mathbb{C} \smallsetminus \{0, -1, -2, \dots\}$ *y consideremos la sucesión de funciones* $f_\nu \in \mathscr{O}(\Omega_0)$ *tal que* $g_\nu(z) = \dfrac{(-1)^\nu}{z+\nu}$. *Entonces la serie de funciones* $g = \sum_{\nu \geqslant 0} f_\nu$ *converge de forma localmente uniforme en* Ω_0.

Demostración. Comencemos observando que todo compacto de $\mathbb{C}$ está contenido en un semiplano vertical abierto de la forma $A = \{z \in \Omega_0 : \Re z > a\}$, y por el Ejercicio 5.1, alcanza con probar que la convergencia es uniforme en cualquiera de ellos. Cada una de estas franjas contiene a lo sumo finitos enteros negativos, así descartando finitos términos de nuestra serie, que no afecta la convergencia de la misma, podemos asumir que $a > 0$.

Escribamos G_ν a la ν-ésima suma parcial de g, y observemos que, como

$$\frac{1}{z+2\nu} - \frac{1}{z+2\nu+1} = \frac{1}{(z+2\nu)(z+2\nu+1)},$$

podemos escribir

$$G_{2\nu-1} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{1}{(z+2\mu)(z+2\mu+1)}, \qquad G_{2\nu} = G_{2\nu-1} + \frac{1}{z+2\nu}.$$

Tomemos ahora un z en A, así $\Re z > a > 0$. Entonces para cualquier natural ν, tenemos que $|z+\nu|^2 = (x+\nu)^2 + y^2 > (a+\nu)^2$. Para concluir, notamos que la serie $\sum_{\nu\geqslant 0} \frac{1}{(a+\nu)^2}$ es convergente, y cuando consideremos una diferencia $|G_\mu - G_\nu|_A$ para $\nu > \mu \gg 0$, podremos acotarla por una cola de ésta última serie y posiblemente un término de la forma $(a+\nu)^{-1}$, que prueba la convergencia uniforme. ◄

De lo anterior se desprende que la serie de funciones

$$h = \sum_{z\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^\nu}{z+\nu}$$

converge de forma local uniforme en $\Omega_1 = \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}$ y, de hecho, que converge uniformemente en cualquier franja horizontal de la forma $A = \{z \in \Omega_1 : a < \Re z < b\}$.

En la demostración anterior no podemos usar el teorema de Weierstrass, pues la serie de normas

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z+\nu|}$$

no es sumable nunca. Nuestra segunda noción de convergencia asume que podemos hacer esto, y es mejor que la noción de convergencia local uniforme.

Definición 2. Sea (f_ν) una sucesión de funciones en $\mathscr{C}(\Omega)$. Decimos que la serie $f = \sum f_\nu$ *converge normalmente en* Ω si todo punto z de Ω admite un entorno abierto U tal que $\sum |f_\nu|_U < \infty$.

Está claro que si una serie converge normalmente en Ω, converge de forma localmente uniforme, así el límite de una serie que converge normalmente en Ω es continuo, y como dijimos antes, si cada término de la suma es una función holomorfa, también lo es la suma. Nuestro último ejemplo muestra que la convergencia normal es más fuerte que la convergencia local uniforme. Como antes, la convergencia normal puede verificarse en entornos compactos en lugar de abiertos. Además, tenemos la siguiente proposición, que muestra que la convergencia normal es "estable" respecto a ciertas operaciones usuales que hacemos sobre series:

Proposición 5.2. *Sean (f_ν) y (g_ν) series de funciones en Ω cuyas series de sumas parciales convergen normalmente en allí. Entonces*

(1) La serie de sumas parciales de $(f_\nu + g_\nu)$ converge normalmente en Ω.

(2) Si (h_ν) es una serie de funciones donde cada producto $f_\mu g_\tau$ aparece una sola vez, entonces la serie de sus sumas parciales de converge normalmente en Ω al producto de las serie de (f_ν) con la de (g_ν).

(3) Si $(f_{\sigma(\nu)})$ es un reordenamiento de (f_ν), entonces converge normalmente en Ω al mismo límite que ésta.

Ejercicio 5.2. Probar que las siguientes series convergen normalmente en Ω_1.

$$s(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\nu)^2}, \qquad t(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\nu \neq 0} \left(\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu} \right)$$

Sugerencia: Intente imitar la demostración de la Proposición 5.1.

Referencias

[1] Reinhold Remmert, *Theory of Complex Functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer Science+Media, LLC, 1991.

[2] Henri Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Adiwes International Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1963.

[3] Tom M. Apostol, *Mathematical analysis: a modern approach to advanced calculus*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1957. MR0087718