Espacios de funciones holomorfas

Martín Mansilla

November 2018

Aquí estudiaremos algunos aspectos de los espacios de funciones holomorfas y aplicaremos herramientas que nacen de su estudio para entender algunos ejemplos concretos. Hasta este momento estudiamos a las funciones holomorfas como elementos separados, ahora las estudiaremos de a muchas, usaremos la estructura de espacio métrico de ciertos conuntos de funciones holomorfas para contar con herramientas más poderosas que permitan taclear nuevos problemas.

1 Definciones

Comencemos con algunas notaciones y definiciones necesarias. En primer lugar, dada una función $f : U \to V$ holomorfa en $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, para cualquier compacto $K \subset U$ definimos

$$\|f\|_K := \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

Observemos que $\|f\|_K < \infty$ ya que f es contínua en particular por ser holomorfa y K es compacto por lo que f es acotada sobre K.

Dados dos abiertos $U, V \in \mathbb{C}$ notaremos $H(U, V)$ al conunto de todas las funciones holomorfas de U en V. Observemos que si $f, g \in H(U, V)$ y $K \subset U$ calcular $\|f - g\|_K$ da una noción de cuán lejos están o cuán diferentes son f y g sobre K, en particular $|f(z) - g(z)| \leq \|f - g\|_K$ da una cota uniforme para cualquier $z \in K$.

Observemos que si K tiene interior no vacío y $\|f - g\|_K = 0$ ambas funciones deben ser iguales cualquier conjunto que contenga a K y este contenido en las componentes conexas de K gracias al principio de identidad. En algún sentido los conjuntos con puntos de acumulación de U caracterizan bien a las funciones holomorfas sobre U, pero no en todos los sentidos. Veremos que no basta un solo compacto para entender $H(U, V)$ como un espacio métrico en sí mismo. En esta sección trataremos de entender los bemoles de esta afrimación, en particular el Ejemplo 2 servirá para aclarar esta idea.

Definición 1 (Convergencia uniforme). *Sean U y V abiertos de $\mathbb{C}$. Dada una sucesioón de funciones $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H(U, B)$ y cierto $A \subset U$ decimos que f_n converge uniformemente sobre A a cierta $f : A \to \mathbb{C}$ si, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in A$.*

Observemos que eso es equivalente a decir que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geq n_0$ entones $\|f_n - f\|_A < \varepsilon$. Esta noción es más fuerte que la de convergencia puntual, es decir, si f_n converge uniformemente sobre A a f entonces para todo $z \in A$ se tiene la convergencia $f_n(z) \to f(z)$ como números.

En particular nos va a interesar el caso en que A sea un conjunto compacto o, en realidad, nuetro interés estará puesto en la convergencia uniforme sobre una familia de conujuntos compactos.

Veamos ahora un ejemplo que muestra que un solo compacto no es suficiente para caracterizar una buena convergencia en un conjunto abierto cualquiera. Analizaremos con cuidado este ejemplo para llegar a la noción correcta de convergencia en los espacios de funciones holomorfas.

Ejemplo 2. *Consideremos el conjunto* $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ *dado por las funciones enteras definidas para cada* $n \in \mathbb{N}$ *como*

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^n. \end{aligned}$$

Resaltemos que claramente cada función f_n es entera, es decir holomorfa sobre todo $\mathbb{C}$. La convergencia de estas funciones es buena dentro del disco unidad $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y tiene un claro cambio de fase al salir del disco.

Convergencia dentro de $\mathbb{D}$:
Veamos que además para cualquier compacto dentro del disco unidad $K \subset \mathbb{D}$ tendremos convergencia uniforme sobre K. Sea $K \subset \mathbb{D}$ compacto, por ser $\mathbb{D}$ abierto $K \cap \partial\mathbb{D} = \emptyset$, como K y $\partial\mathbb{D}$ son compactos su distancia es postiva, es fácil ver entonces que debe existir $0 < r < 1$ tal que $K \subset r\mathbb{D}$. Tenemos así que para todo $z \in K$ vale $|z| \leq r < 1$, luego

$$\|f_n - 0\|_K = \sup_{z\in K} |z^n - 0| = \sup_{z\in K} |z|^n \leq r^n \to 0,$$

como r^n tiende a 0 con n, eso da convergencia uniforme en todo K (la velocidad de convergencia no depende de cada elemento de K, es global allí). En particular esto dice que para todo elemento $z \in \mathbb{D}$ $f_n(z) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Convergencia fuera de $\mathbb{D}$:
Por otro lado si $|z| \geq 1$ vale que $|z^n| \geq 1$ para todo $n \in N$. Así, si f_n tiende en algún sentido a cierta función f, esta tiene que cumplir $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|f(z)| \geq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}^c = \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, con lo cuál f no puede ser contínua en $\mathbb{C}$ y mucho menos holomorfa.

Analicemos con más cuidado lo que sucedido en el Ejemplo 2. Si bien cada función f_n de la sucesión es entera y hay compactos para los que f_n converge uniformemente, su límite no es una función entera. Por otro lado el límite si es una función holomorfa restringida al disco. Observemos que los compactos en los que hay convergencia uniforme de f_n son todos los compactos que están dentro del disco. Esto inspira una nueva noción de convergencia, la *convergencia uniforme sobre compactos.*

Definición 3 (Convergencia uniforme sobre compactos de un conjunto)**.** *Dados $U, V \subset \mathbb{C}$ abierto y cierta sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H(U,V)$ diremos que f_n converge uniformemente sobre compactos de U a cierta función f si para todo $K \subset U$ compacto vale que $\|f_n - f\|_K \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Esta noción de convergencia en principio no corresponde a la de ninguna métrica. pero ahora veremos como podemos construir una métrica en $H(U,V)$ que contenga toda la información de la convergencia uniforme sobre compactos de U. La construcción de dicha métrica involucra considerar ciertos conjuntos compactos que representen bien al conjunto U. Fijado un conjunto $U \subset \mathbb{C}$ abierto definamos la sucesión de conjuntos compactos $\{K_n\}_{n\geq 1} \subset U$ del siguiente modo

$$K_n := \left\{ z \in U : \operatorname{dist}(\partial U, z) \geq \frac{1}{n} \text{ y } |z| \leq n \right\},$$

donde $\operatorname{dist}(\partial U, z) := \inf_{u \in \partial U} |u - z|$. No es dificil ver que K_n es acotado y cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$ con lo cuál son efectivamente compactos. Además vale que

(i) $U = \cup_{n\geq 1} K_n$.

(ii) $K_n \subset K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ el interior de K_n es no vacío.

Observación 4. *Gracias a los items (i) y (ii) Cualquier $K \subset U$ compacto cumple $K \subset K_n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Así una sucesión $(f_k)_{k\geq 1} \subset H(U,V)$ converge a cierta función f uniformemente sobre compactos de U si y sólo si converge uniformemente a f sobre cada uno de los compactos de $\{K_n\}_{n\geq 1}$.*

Definiremos ahora una métrica sobre $H(U,V)$ que hará de este conjunto un espacio métrico cerrado.

Podemos definir para cualquier sucesión que cumpla con los tres items antes enumerados la distancia en $H(U,V)$ dada por

$$d_{H(U;V)}(f,g) = d(f,g) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1 + \|f-g\|_{K_n}}.$$

Esto dice que la convergencia uniforme sobre compactos de U era una noción de convergencia *metrizable* en $H(U,B)$. Observemos que fue clave para lograr esto que exista un conjunto de compactos en U *numerable* que concentre toda la información de la convergencia.

Teorema 5. *Para cualquier par $U.V \subset \mathbb{C}$ de conjuntos abiertos $\big(H(U,V), d_{H(U,V)}\big)$ resulta un espacio métrico cerrado.*

En particular esto dice que si una sucesión $\{f_k\}_{k\geq 1} \subset H(U,V)$ converge a cierta función f en la distancia $d_{H(U,V)}$ entonces $f \in H(U,V)$.

Recordemos que la métrica que recién definimos condensa toda la información de la convergencia uniforme sobre compactos de U y al revéz. En otras palabras

$$d_{H(U,V)}(f_n - f) \to 0 \iff \|f_n - f\|_K \to 0 \text{ para todo compacto } K \subset U.$$

Luego si $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H(U,V)$ cumple que $\|f_n - f\|_K \to 0$ para todo compacto $K \subset U$, gracias al Teorema 5, tenemos que $f \in H(U,V)$.

Observemos que, si bien las funciones de la sucesión en el Ejemplo 2 son enteras, convergen uniformemente solo sobre compactos de $\mathbb{D}$. En particular $f_n \in H(\mathbb{D},\mathbb{D})$ y su límite es una función de $H(\mathbb{D},\mathbb{D})$.

2 Teorema de Hurwitz

En esta sección aplicaremos una nueva herramienta de los espacios de funciones holomorfas que relaciona los ceros de las sucesiones de funciones que tienen límite en el sentido de la convergencia uniforme sobre compactos con los ceros de su función límite.

Teorema 6 (Hurwitz)**.** *Sean $U, V \subset \mathbb{C}$ abiertos, $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H(U,V)$ y $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos de U. Entonces para cada $\overline{B_r(z_0)} \subset U$, de forma que f no se anula en $\partial B_r(z_0)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geq n_0$ cada f_n tiene la misma cantidad de ceros que f contados con multiplicidad.*

La esencia del Teorema 6 es que para toda bola cuya clausura este contenida en U, a partir de un momento todas las funciones de una sucesión convergente tiene la misma cantidad de ceros que su límite contados con multiplicidad. Observemos que los ceros pueden ubicarse en diferentes lugares y hasta puede que la cantidad de ceros, si no se tiene en cuenta su multiplicidad, puede cambiar. La idea en la demostración del Teorema 6, que sirve para entender su enunciado es que si n es suficientemente grande, debe suceder que

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz = \int_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

lo cuál, para funciones holomorfas cuenta los zeros encerrados en $B_r(z_0)$ con multiplicidad.

Ejemplo 7. *Para todo $0 < r < 1$ Existe $N_0(r) = N_0 \in \mathbb{N}$ de forma que para todo $n \geq N_0$ el polinomio $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k$ tiene un solo cero en $B_r(0)$.*

Proof. Consideremos función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \to & \quad \mathbb{C} \\ z \mapsto & \quad \mathrm{Log}(z+1), \end{aligned}$$

con Log la rama principal del logaritmo. Observemos que el desarrollo en serie de Taylor de f alrededor del 0 es

$$f(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k,$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Luego, si consideramos la sucesión de funciones $(P_n)_{n\geq} \in H(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ dada por $P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k$ tenemos que $P_n \to f$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$ (toda suma truncada de una serie de Taylor converge uniformemente sobre compactos del disco de convergencia). Además veamos que el único cero de f en $\mathbb{D}$ es 0 y su multiplicidad es 1. En primer lugar, $f(0) = \log(1) = 0$ y

$$f'(0) = \left(\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k \right)' \Big|_{z=0} = \left(\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} z^{k-1} \right)' \Big|_{z=0} = 1 \neq 0,$$

con lo cuál el punto 0 es un cero con multiplicidad 1 de f. Además los logaritmos son funciones inyectivas en su dominio, con lo cuál no puede haber otro cero diferente. Gracias al Teorema 6 se sigue el enunciado del ejemplo. □

3 Teorema de Montel

Definición 8 (Localmente acotada). *Diremos que una familia $\mathcal{F} \subset H(U, V)$ de funciones holomorfas de U en V es localmente acotada si para todo $K \subset U$ compacto existe $M_K > 0$ de forma que $\|f\|_K \leq M_K$ para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Lema 9. *Toda $\mathcal{F} \subset H(U, V)$ es localmente acotada cuando V es acotado.*

Proof. Queremos ver que para cualquier compacto $K \subset U$ existe $M_K > 0$ de forma que $\|f\|_K \leq M_k$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Por ser V acotado existe $R > 0$ tal que $V \subset B_R(0)$. Para todo $z \in U$ y toda $f \in \mathcal{F}$ $f(z) \in V$ con lo cual $|f(z)| \leq R$. Dado un compacto cualquiera $K \subset U$, podemos tomar $M_K = R$ y vale que $\|f\|_K = \sup_{z\in K} |f(z)| \leq R = M_K$ siempre que $f \in \mathcal{F}$. □

Definición 10 (Normal). *Diremos que una familia $\mathcal{F} \subset H(U, V)$ de funciones holomorfas de U en V es normal cuando toda sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ tiene una subsuseción convergente en $H(U, V)$.*

Observemos que, el límite de la subsucesión convergente no necesariamente pertence a la familia $\mathcal{F}$. Es útil notar que, en el lenguaje de los espacios métricos, un familia normal $\mathcal{F}$ no es otra cosa que un suboconjunto pre-compacto de $H(U, V)$, es decir que la clausura de $\mathcal{F}$ es compacta.

Teorema 11 (Teorema de Montel). *Para cualquier familia de funciones holomorfas $\mathcal{F} \subset H(U, V)$ son equivalentes:*

(i) $\mathcal{F}$ *es localmente acotada.*

(ii) $\mathcal{F}$ *es normal.*

Ejemplo 12. *Sea* $\mathcal{F} = \{f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *holomorfas*$\}_{n\geq 1}$ *la familia dada por una sucesión de funciones holomorfas del disco unidad en sí mismo. Si además sucede que para cada entero mayor* $m > 1$ *la sucesión* $\{f_n(\frac{1}{m})\}_{n\geq 1}$ *es convergente entonces*

$$\{f_n(z)\}_{n\geq 1},$$

converge para todo $z \in \mathbb{D}$*.*

Proof. Queremos probar algo sobre convergencia de funciones, será de utilidad entonces saber que la familia $\mathcal{F}$ es normal.

Supongamos que $\mathcal{F}$ es normal y veamos que eso será suficiente para probar el enunciado del ejemplo, luego probaremos que efectivamente lo es. Cualquier subsuseción $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ es una sucesión de funciones en $\mathcal{F}$, si $\mathcal{F}$ es normal tenemos que existe alguna subsubsuceción $(f_{n_{k_j}})_{j\geq 1}$ convergente en la distancia de $H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ a cierta función f^1. Si tomaramos cualquier otra subsuseción $(f_{n_l})_{l\geq 1}$, por iguales motivos existe una subsubsucesión $(f_{n_{l_i}})_{i\geq 1}$ convergente en la distancia de $H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ a cierta función f^2.

Veamos que $f^1 = f^2$. Por hipotesis sabemos que para cualquier entero $k > 1$ $\{f_n(1/m)\}_{n\geq 1}$ es convergente a cierto $z_m \in \mathbb{D}$, luego,

$$\begin{aligned} f^1(1/m) &= \lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}}(1/m) = z_m \\ f^2(1/m) &= \lim_{i\to\infty} f_{n_{l_i}}(1/m) = z_m. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $f^1(1/m) = f^2(1/m)$ para todo $m > 1$. Como $\{1/m\}_{m>1}$ tiene al 0 de punto de acumulación ($0 \in \mathbb{D}$) y tanto f^1 como f^2 son funciones holomorfas en $\mathbb{D}$, gracias al principio de identidad tenemos que $f^1(z) = f^2(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Llamemos f a cualquier función construída como f^1 y f^2 (hemos probado que son todas iguales).

Así tenemos que $\{f_n(z)\}_{n\geq 1}$ cumple que toda subsuseción tiene una subsuceción que converge a $f(z)$. Esto es equivalente a que $\{f_n(z)\}_{n\geq 1}$ sea convergente.

Veamos que enrealidad $\mathcal{F}$ es una familia normal. Como $\mathcal{F} \subset H(U, V)$ con V acotado (en este caso $V = \mathbb{D}$) sabemos por el Lema 9 que $\mathcal{F}$ es localmente acotada. Así gracias al Teorema 11 tenenmos que $\mathcal{F}$ es normal. $\square$