El espacio de funciones holomorfas

Pedro Tamaroff

1. El espacio $\mathscr{C}(\Omega)$

I. Convergencia local uniforme

Fijemos una región Ω en $\mathbb{C}$. Presentamos ahora, sin más, una de las dos nociones de convergencia en $\mathscr{C}(\Omega)$ que serán centrales en todo el capítulo.

Una sucesión de funciones (f_n) en $\mathscr{C}(\Omega)$ ***converge de forma localmente uniforme en*** Ω si todo punto $z \in \Omega$ admite un entorno U donde la sucesión de restricciones $(f_n|_U)$ converge uniformemente. Notemos que si (f_n) converge de forma localmente uniforme en Ω, define una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y, en vista de la convergencia uniforme, esta función pertenece también a Ω.

Notemos, también, que la condición implica que (f_n) converge uniformemente en una familia de discos abiertos que cubren a Ω, y luego para todo compacto K de Ω, la sucesión de restricciones $(f_n|_K)$ converge uniformemente. Recíprocamente, dado que todo disco cerrado contiene un disco abierto más pequeño, si para todo compacto K de Ω, la sucesión de restricciones $(f_n|_K)$ converge uniformemente, entonces (f_n) converge de forma localmente uniforme en Ω.

II. Convergencia y metrizabilidad

En lo que sigue, diremos que una sucesion ***converge en*** $\mathscr{C}(\Omega)$ si lo hace de forma localmente uniforme. Veamos ahora que esta noción de convergencia es metrizable: existe una métrica d en $\mathscr{C}(\Omega)$ tal que una sucesión (f_n) en $\mathscr{C}(\Omega)$ converge de forma localmente uniforme si y solamente si es una sucesión de Cauchy para d.

Para cada compacto K de Ω, definimos la ***seminorma asociada a*** K: para cada $f \in \mathscr{C}(\Omega)$,

$$|f|_K = \max_{\xi \in K} |f(\xi)|.$$

El nombre seminorma se debe a que la asignación

$$f \in \mathscr{C}(\Omega) \longmapsto |f|_K \in \mathbb{R}$$

verifica todas las propiedades de una norma salvo la condición que $|f|_K = 0$ implica que f es la función nula. Obtenemos así una familia de seminormas $\mathscr{K} = \{|\cdot|_K : K \subseteq \Omega \text{ compacto}\}$.

La condición de convergencia local uniforme puede enunciarse ahora en términos de la familia $\mathscr{K}$: una sucesión (f_n) converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ si y solamente si para todo compacto K en Ω,

$$\lim_{n,m\to\infty} |f_n - f_m|_K = 0.$$

Lema 1.1. *Existe $\mathscr{K}_0$ una subfamilia numerable de $\mathscr{K}$ tal que una sucesión (f_n) converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ si y solamente si para toda $|\cdot|_K \in \mathscr{K}_0$,*

$$\lim_{n,m\to\infty} |f_n - f_m|_K = 0.$$

Demostración. En el Ejercicio 2.1 de estas notas construímos una familia numerable de compactos crecientes $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuya unión es Ω. Sea $\mathscr{K}_0$ la familia de seminormas asociada a tal conjunto de compactos. Si K es un compacto arbitrario de Ω, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq \Omega_n$: como K es acotado y $K \cap \overline{\partial\Omega} = 0$, podemos elegir n de modo que valga simultáneamente que $d(0,K) \leqslant n$ y $d(\partial\Omega, K) \geqslant n^{-1}$.

En particular, para todo compacto K en Ω existe n tal que $|f|_K \leqslant |f|_{\Omega_n}$ para toda $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, y esto hace evidente que vale la afirmación del enunciado para nuestra elección de $\mathscr{K}_0$. ◂

Construímos ahora la métrica deseada. De hecho, definiremos una pseudonorma en $\mathscr{C}(\Omega)$ que induce la métrica correcta. Una pseudonorma sobre $\mathscr{C}(\Omega)$ es una función $\rho : \mathscr{C}(\Omega) \longrightarrow [0,\infty)$ que cumple que para $f, g \in \mathscr{C}(\Omega)$:

(1) $\rho(\lambda f) \leqslant \rho(f)$ si $|\lambda| \leqslant 1$,

(2) $\lim_{\lambda\to 0} \rho(\lambda f) = 0$,

(3) $\rho(f+g) \leqslant \rho(f)+\rho(g)$,

(4) $\rho(f)=0$ si y sólo si $f=0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada f en $\mathscr{C}(\Omega)$, sea $|f|_n = \text{mín}(1, |f|_{\Omega_n})$ y definamos $\|\cdot\|_\Omega : \mathscr{C}(\Omega) \longrightarrow [0,\infty)$ de modo que

$$\|f\|_\Omega = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f|_n 2^{-n}.$$

Dado que $|f|_n \leqslant 1$ para todo n, la serie anterior converge para cualquier elección de f en $\mathscr{C}(\Omega)$: la métrica deseada $d : \mathscr{C}(\Omega)\times\mathscr{C}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $d(f,g) = \|f-g\|_\Omega$ para cada $f,g \in \Omega$.

Proposición 1.2. *La función $\|\cdot\|_\Omega$ es una pseudonorma en $\mathscr{C}(\Omega)$, y una sucesión (f_n) converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ si y solamente es una sucesión de Cauchy para la métrica inducida por $\|\cdot\|_\Omega$.*

Demostración. Está claro que $\|\cdot\|$ toma valores no negativos. Por otro lado, si $\|f\| = 0$ entonces $|f|_{\Omega_n} = 0$ para cada compacto Ω_n y, dado que su unión es Ω, $f = 0$ en Ω, así vale la propiedad (4). La validez de la desigualdad triangular, esto es, la propiedad (3), se deduce inmediatamente de su validez para cada una de las seminormas $|f|_n$. La propiedad (2) es mínimamente más delicada: dada $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, podemos tomar N tal que

$$\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon$$

y a su vez tomar $\delta > 0$ para que $\delta|f|_N < 1$ y

$$\delta|f|_N \sum_{n=1}^{N} 2^{-k} < \varepsilon.$$

Esto implica que $\|\lambda f\|_\Omega < 2\varepsilon$ si $|\lambda| < \delta$, y prueba que tal propiedad se cumple, mientras que la propiedad (1) es evidente. Para ver que la métrica inducida por esta pseudonorma es la correcta, es suficiente que notemos que si (f_n) es una sucesión en $\mathscr{C}(\Omega)$ y si $\|f_n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ es el caso que $|f_n|_k \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$. Por el Lema 1.1, (f_n) converge a 0 en $\mathscr{C}(\Omega)$, como queríamos ver. ◀

Notemos que $\|\cdot\|_\Omega$ no es una norma vectorial. Por otro lado, para cada f y g en $\mathscr{C}(\Omega)$, es cierto que $\|fg\|_\Omega \leqslant \|f\|_\Omega \cdot \|g\|_\Omega$, por lo que la multiplicación $\mathscr{C}(\Omega)\times\mathscr{C}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{C}(\Omega)$ es continua y, con la métrica inducida por esta pseudonorma, $\mathscr{C}(\Omega)$ es un espacio métrico completo. En lo que sigue, siempre consideraremos $\mathscr{C}(\Omega)$ munido de esta métrica. Parte de la siguiente proposición afirma que $\mathscr{O}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{C}(\Omega)$, y luego es él mismo un espacio métrico completo.

Proposición 1.3. *Sea (f_n) una sucesión en $\mathscr{O}(\Omega)$ que converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ a f. Entonces $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, y para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $(f_n^{(k)})$ converge a $(f^{(k)})$ en $\mathscr{O}(\Omega)$. En particular, la función $f \in \mathscr{O}(\Omega) \longmapsto f' \in \mathscr{O}(\Omega)$ es continua.*

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{O}(\Omega)$ y supongamos que converge a f. Entonces $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ y, por el Lema 3.5 en estas notas, para todo triángulo T en Ω,

$$\int_{\partial T} f\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial T} f_n\,dz = 0,$$

en vista de que f_n es holomorfa para cada $n \in \mathbb{N}$ y el Teorema de Goursat. Luego f tiene integral nula sobre todo triángulo contenido en Ω, y es holomorfa por el Teorema de Morera. La segunda afirmación se sigue de las estimaciones de Cauchy en compactos, que es el Teorema 2.1 de estas notas. ◀

III. Independencia de la exhaución

Hasta ahora construímos una métrica en $\mathscr{C}(\Omega)$ usando una exhausción por compactos de Ω particular. Veamos que, aunque las métricas que se obtienen de distintas exhauciones son en general distintas, los abiertos que definen en $\mathscr{C}(\Omega)$ no dependen de la exhaución que elejimos.

Recordemos que $\mathscr{K}$ es la familia de todas las seminormas en $\mathscr{C}(\Omega)$ asociadas a los compactos de Ω. Para cada $\varepsilon > 0$, cada compacto K en Ω y cada $f \in CO$, definimos $U(f;K,\varepsilon) = \{g \in \mathscr{C}(\Omega) : |f-g|_K < \varepsilon\}$. Este conjunto es un ***abierto básico*** de $\mathscr{C}(\Omega)$, y el conjunto $\mathscr{U}_f = \{U(f;K,\varepsilon) : K$ compacto de Ω y $\varepsilon > 0\}$ es una ***base de abiertos de $\mathscr{C}(\Omega)$ en f***.

La siguiente proposición dice que estos conjuntos, como su nombre lo indica, son abiertos, y que todo abierto de $\mathscr{C}(\Omega)$ es una unión de conjuntos de esta forma: esto da el resultado que buscamos y explica el nombre que le dimos a las colecciones de abiertos $\mathscr{U}_f$ para $f \in \mathscr{C}(\Omega)$.

Proposición 1.4. *Sea ρ una métrica definida en $\mathscr{C}(\Omega)$ usando una familia numerable de seminormas en $\mathscr{C}(\Omega)$ asociadas a una exhausión por compactos de Ω. Entonces*

- *para cualquier elección de $\varepsilon > 0$, de un compacto K de Ω y de $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, el conjunto $U(f;K,\varepsilon)$ es abierto y,*
- *dado $\delta > 0$ y $f \in \Omega$, existe un compacto K de Ω y $\varepsilon > 0$ tal que $U(f;K,\varepsilon) \subseteq B_\delta(f)$.*

Luego, todo abierto de $\mathscr{C}(\Omega)$ es una unión de abiertos de la forma $U(f,K,\varepsilon)$ y, en particular, los abiertos de $\mathscr{C}(\Omega)$ no dependen de nuestra elección de exhaución por compactos de Ω.

De forma más breve, cualquier par de métricas obtenidas como en la proposición son topológicamente equivalentes.

Demostración. Por comodidad, hagamos la prueba para d y $\mathscr{K}_0$: no hay pérdida de generalidad en hacerlo en este caso.

Tomemos $\varepsilon > 0$, K un compacto de Ω y $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, y veamos que el conjunto $U(f;K,\varepsilon)$ es abierto. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que K esta contenido en K_N. Sea $\delta = 2^{-N} \min(\varepsilon, 1)$ y tomemos $g \in B_\delta(f)$. Entonces en particular $|f-g|_N < \min(\varepsilon,1)$ y luego $|f-g|_{K_N} < \varepsilon$. Dado que $K \subseteq K_N$, esto prueba que $g \in U(f;K,\varepsilon)$, y luego que este conjunto es abierto.

Recíprocamente, dado $\delta > 0$, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ de forma que $\sum_{n>N} 2^{-n} < \delta/2$. Para esta elección de δ, podemos tomar $\varepsilon < 1$ de forma que si $g \in U(f;K_N,\varepsilon)$ entonces

$$\sum_{n=1}^{N} |f-g|_n 2^{-n} \leqslant |f-g|_{K_N} \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \leqslant \varepsilon \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} < \delta/2.$$

Deducimos que si $g \in U(f;K,\varepsilon)$ entonces $\|f-g\|_\Omega < \delta$, que prueba la segunda parte de la proposición. La última afirmación de la misma es ahora inmediata: resulta que todo disco abierto en $\mathscr{C}(\Omega)$ es una unión de abiertos de la forma $U(f;K,\varepsilon)$, y luego que lo mismo es cierto para un abierto arbitrario de $\mathscr{C}(\Omega)$. Esto completa la demostración. ◀

2. Familias de funciones

I. El teorema de Montel

Fijemos una ***familia de funciones*** en $\mathscr{O}(\Omega)$, esto es, un subconjunto $\mathscr{F}$ de $\mathscr{O}(\Omega)$. Para cada compacto K de $\mathscr{O}(\Omega)$ definimos $|\mathscr{F}|_K = \sup_{f\in\mathscr{F}} |f|_K$. La familia $\mathscr{F}$ es ***localmente acotada*** si para cada compacto K de Ω tenemos que $|\mathscr{F}|_K < \infty$, y es ***acotada*** si $|\mathscr{F}|_\Omega := \sup_{f\in\mathscr{F}} |f|_\Omega < \infty$.

Notemos que la primera condición es equivalente a la condición que para cada punto $z \in \Omega$ exista un disco B centrado en z tal que $|\mathscr{F}|_B < \infty$. Toda familia acotada es, evidentemente, localmente acotada, sin embargo, la familia de funciones $\{z, 2z^2, 3z^3, \cdots\}$ definida sobre $\mathbb{E}$ es localmente acotada y no es acotada. Toda sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $\mathscr{O}(\Omega)$ define una familia asociada $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, y esto nos permite hablar de sucesiones localmente acotadas o acotadas.

Le recordamos al lector el siguiente teorema de Cesare Arzelà (1847-1912) y Giulio Ascoli (1843-1896), que da condiciones suficientes para que una familia de funciones en $\mathscr{C}(\Omega)$ sea precompacta.

Teorema 2.1 (de Arzelà–Ascoli)**.** *Toda familia $\mathscr{F}$ en $\mathscr{C}(\Omega)$ que es localmente acotada y localmente uniformemente equicontinua es precompacta. Esto es, toda sucesión en $\mathscr{F}$ admite una subsucesiíon convergente.*

El siguiente teorema es nuestro primer resultado básico de precompacidad en $\mathscr{O}(\Omega)$, y es uno de los teoremas de Paul A. A. Montel (1876 – 1975) que estudiaremos.

Teorema 2.2 (de Montel para sucesiones)**.** *Toda sucesión localmente acotada en $\mathscr{O}(\Omega)$ admite una subsucesión convergente.*

Basamos su demostración en una serie de lemas, el primero de ellos es un resultado usual de diagonalización para familias de funciones puntualmente acotadas, cuya demostración omitimos.

Lema 2.3. *Sea D un subconjunto numerable de Ω. Toda sucesión de funciones puntualmente acotada en Ω admite una subsucesión que converge puntualmente en D.*

Recordemos que $\mathscr{F}$ es ***localmente uniformemente equicontinua*** si para cada $c \in \Omega$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un disco $B \ni c$ en Ω tal que para toda $f \in \mathscr{F}$ vale que $\omega(f,B) = \sup_{z,w\in B} |f(z) - f(w)| \leqslant \varepsilon$. Llamamos a este número la ***oscilación de f en B***.

Lema 2.4. *Toda familia localmente acotada en $\mathscr{O}(\Omega)$ es localmente uniformemente equicontinua.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ una familia localmente acotada en $\mathscr{O}(\Omega)$, y tomemos $\varepsilon > 0$ y un punto $c \in \Omega$. Por hipótesis, existe un disco B, que podemos asumir está centrado en c, tal que $|\mathscr{F}|_B < \infty$. Sea B' un disco concéntrico a B con la mitad de su radio $2r$, así $d(B', \partial B) = r$, y tomemos $z, w \in B'$. Por la fórmula de Cauchy, y la estimación estándar, resulta que

$$|f(z) - f(w)| \leqslant \frac{|z-w|}{2\pi} \left| \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - w)} d\xi \right| \leqslant |z-w| |\mathscr{F}|_B \frac{2}{r}.$$

Esto implica que si $f \in \mathscr{F}$ y $s < r$, entonces

$$\omega(f, B_s(c)) \leqslant |\mathscr{F}|_B 4 s r^{-1},$$

y basta que tomemos $s = \min(r\varepsilon(4|\mathscr{F}|_B)^{-1}, r)$ para que $\omega(f, B_s(c)) \leqslant \varepsilon$. ◀

Notemos que la familia $\{z + n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathscr{O}(\mathbb{E})$ es uniformemente equicontinua, así *a fortiori* locamente uniformemente equicontinua, pero no es localmente acotada.

En este momento podríamos apelar al teorema de Arezelà–Ascoli, pues probamos que una familia de funciones holomorfas que es localmente acotada es también locamente uniformemente equicontinua. Para que la exposición sea un poco más autocontenida, y por ser interesante en si mismo el siguiente lema, preferimos tomar el camino más largo, en el que daremos una demostración del teorema de Arezelà–Ascoli.

El último lema que necesitamos nos da aún otra una condición equivalente a la de la convergencia local uniforme de una sucesión de funciones. Una sucesión (f_n) en $\mathscr{C}(\Omega)$ ***converge continuamente en*** Ω si para cada sucesión convergente (z_n) en Ω, existe el límite $\lim_{n\to\infty} f_n(z_n)$. Notemos que si tomamos para cada $z \in \Omega$ la sucesión constante con valor z, deducimos que toda familia que converge continuamente converge, en particular, puntualmente, y luego queda definida una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ por la receta $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ para cada $z \in \Omega$.

De hecho, vale que $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_n)$ para toda sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Ω que tienda a z, como el lector puede verificar construyendo de cualquier par de tales sucesiones una sucesión que también converge a z y tiene a las dos primeras como subsucesiones.

Lema 2.5. *Una sucesión de funciones sobre Ω converge continuamente en Ω si y solamente si converge a una función en $\mathscr{C}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones sobre Ω y supongamos, primero, que converge compactamente a una $f \in \mathscr{C}(\Omega)$. Dada una sucesión (z_n) en Ω que converge a $z \in \Omega$, formemos el compacto $L = \{z, z_1, z_2, \ldots\}$. Como f_n converge de forma local uniforme a f, existe $\lim |f - f_n|_L = 0$, y luego, en particular, $\lim_{n\to\infty} f(z_n) - f_n(z_n) = 0$. Como f es continua, también es cierto que $\lim_{n\to\infty} f(z) - f(z_n) = 0$ y, juntando estas dos afirmaciones, deducimos que $f_n(z_n)$ converge a $f(z)$, como queríamos probar.

Recíprocamente, supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente en Ω. Ya vimos que en ese caso existe una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_n \to f$ puntualmente. Veamos que f es continua y que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\mathscr{C}(\Omega)$. Para ver lo primero, supongamos que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Ω que tiende a $z \in \Omega$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| < \varepsilon$ para cada $k \in \mathbb{N}$, pues para cada k fijo, $f_n(z_k) \longrightarrow f(z_k)$ cuando $n \to \infty$. Podemos ahora estimar

$$|f(z) - f(z_k)| \leqslant |f(z) - f_{n_k}(z_k)| + |f_{n_k}(z_k) - f(z_k)|.$$

Como la subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ también converge continuamente a f, deducimos junto con lo anterior que $f(z_k) \to f(z)$, que prueba que f es continua. Finalmente, veamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\mathscr{C}(\Omega)$. Si no es el caso, existe un compacto K de Ω de modo que $|f_n - f|_K$ no tiende a cero cuando $n \to \infty$, y podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en K, que podemos asumir converge a algún punto $z \in K$, de forma que

$$|f_n(z_n) - f(z_n)| \geqslant \varepsilon \tag{1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, como $z_n \to z$ y como f es continua, resulta que $f(z_n) \to f(z)$ y, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a f continamente, es el caso que $f_n(z_n) \to f(z)$, que implica que $\lim_{n\to\infty} |f_n(z_n) - f(z_n)| = 0$, en contradicción con (1). Esto concluye la demostración del lema. ◀

Podemos dar ahora la

Demostración del teorema de Montel para sucesiones. Tomemos una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{O}(\Omega)$ que es localmente acotada. Por el Lema 2.3 existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente en el conjunto numerable y denso A de puntos con coordenadas racionales en Ω. Para alivianar la notacion, notemos $g_k = f_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Veamos que la sucesión $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{C}(\Omega)$. Para esto basta, por el Lema 2.5, probar que converge continuamente en Ω.

Tomemos entonces una sucesión $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en Ω que converge a $z \in \Omega$, y veamos que $(g_k(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Como $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es localmente acotada, el Lema 2.4 prueba que es localmente uniformemente equicontinua: dado $\varepsilon > 0$ y este $z \in \Omega$, existe un disco B con centro z tal que $\operatorname{Var}(g_k, B) \leqslant \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Podemos tomar ahora un $a \in A \cap B$, pues A es denso en Ω, y un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geqslant N$, entonces $z_k \in B$, pues $z_k \to z \in B$. Como además $(g_n(a))$ converge, podemos asumir que N es tal que $|g_n(a) - g_m(a)| \leqslant \varepsilon$ si

$m,n \geqslant N$. En esta situación, resulta que $|g_n(z_n) - g_m(z_m)|$ es a lo sumo

$$|g_n(z_n) - g_n(a)| + |g_n(a) - g_m(a)| + |g_m(a) - g_m(z_m)| \leqslant 3\varepsilon$$

que prueba que $(g_k(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge, y completa la demostración del teorema. ◄

Diremos que una familia $\mathscr{F}$ en $\mathscr{C}(\Omega)$ es ***normal*** si toda sucesión de $\mathscr{F}$ admite una subsucesión convergente, es decir, si $\mathscr{F}$ es (secuencialmente) precompacta en $\mathscr{C}(\Omega)$. Así, tenemos ya demostrada una implicación del siguiente

Teorema 2.6 (de Montel para familias)**.** *Una familia en $\mathscr{O}(\Omega)$ es normal si y solamente si es localmente acotada.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ una familia en $\mathscr{O}(\Omega)$, y supongamos primero que es localmente acotada. Ciertamente toda sucesión de $\mathscr{F}$ tiene esta propiedad, y luego por el teorema de Montel para sucesiones, admite una subsucesión convergente en $\mathscr{C}(\Omega)$, que ya sabemos tiene su límite en $\mathscr{O}(\Omega)$. Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{F}$ no es localmente acotada. Podemos encontrar entonces una sucesión de puntos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un disco B de Ω y una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{F}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ sea $|f_n(z_n)| \geqslant n$. Podemos asumir, además, que z_n converge a algún punto $z \in B$. Resulta entonces que ninguna subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede converger en $\mathscr{C}(\Omega)$, pues en particular esto implicaría que alguna subsucesión de $(f_n(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, y esto es imposible. ◄

Veamos ahora que relación hay entre las familias normales y la familia de derivadas de sus elementos. Dada una familia $\mathscr{F}$, notamos por $\mathscr{F}'$ a esta segunda familia.

Teorema 2.7. *Sea $\mathscr{F}$ una familia normal en $\mathscr{O}(\Omega)$. Entonces la familia $\mathscr{F}'$ también es normal. Por otro lado, si la familia $\mathscr{F}'$ es normal y si $\mathscr{F}$ está acotada en al menos un punto de Ω, entonces $\mathscr{F}$ es localmente acotada, y luego normal.*

Demostración. Supongamos primero que $\mathscr{F}$ es normal o, equivalentemente, que es localmente acotada, y veamos que $\mathscr{F}$ también es localmente acotada. Por las estimaciones de Cauchy sobre compactos, para cada disco cerrado B contenido en Ω existe un disco abierto $B' \supseteq B$ contenido en Ω y una constante absoluta M que depende solo de Ω, B' y B, tal que $|f'|_B \leqslant M|f|_{B'}$ para cada $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, y luego en particular para cada $f \in \mathscr{F}$. Evidentemente, esto implica que $\mathscr{F}'$ es localmente acotada si $\mathscr{F}$ lo es.

Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{F}'$ es localmente acotada, y que $c \in \Omega$ es un punto donde $\mathscr{F}$ está acotada, es decir, tal que $\sup_{f\in\mathscr{F}} |f(c)| =: |\mathscr{F}|_c < \infty$. Fijemos un $z \in \Omega$ y tomemos un disco $B \ni z$ contenido en Ω y un camino poligonal γ_z en Ω de z a c. Para cada $w \in B$, sea γ_w el camino de w a c que se obtiene concatenando $[z,w]$ y γ_z. De la igualdad

$$f(w) = f(c) + \int_{\gamma_w} f'(\xi)d\xi$$

y la estimación estándar deducimos que para cada $w \in B$ y cada $f \in \mathscr{F}$,

$$|f(w)| \leqslant |\mathscr{F}|_c + |\mathscr{F}'|_K L(\gamma_w),$$

donde K es el compacto $B \cup \gamma_z$. Como $L(\gamma_w) \leqslant L(\gamma_z) + r$ donde r es el radio de B, deducimos que $|\mathscr{F}|_B < \infty$, como queríamos. ◀

La hipótesis de que $\mathscr{F}$ esté acotada en al menos un punto es necesaria: la familia de funciones constantes $\{n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ no es localmente acotada, sin embargo lo es, trivialmente, su familia de derivadas.

Los siguientes son ejemplos de familias normales; el lector debe probar que este es el caso para cada uno de ellos. ¿Cuáles de ellas son cerradas, y luego compactas?

(1) $\{z \in \mathbb{E} \longmapsto z^n \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$,

(2) $\{z \in \mathbb{C} \longmapsto n^{-1}z \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$,

(3) $\{f \in \mathscr{O}(\Omega) : |f| \leqslant M\}$ donde $M > 0$ es una constante fija,

(4) $\{f \in \mathscr{O}(\Omega) : \Re(f) > 0\}$,

(5) $\{z \in \mathbb{E} \longmapsto \eta \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \in \mathbb{E} : a \in \mathbb{E}, \eta \in \partial\mathbb{E}\}$, la familia de automorfismos de $\mathbb{E}$,

(6) $\{f \in \mathscr{O}(\mathbb{E}) : |f^{(n)}(0)| \leqslant Mn! \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$ donde $M > 0$ es una constante fija.

II. Otros teoremas clásicos

El siguiente criterio es útil para probar que una sucesión de funciones en $\mathscr{O}(\Omega)$ converge a otra.

Teorema 2.8 (Criterio de convergencia de Montel)**.** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión localmente acotada en $\mathscr{O}(\Omega)$. Si existe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ tal que toda subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ converge a f, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f.*

Demostración. Supongamos que no. Existe entonces un compacto K en Ω, un $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale que $|f - f_{n_k}| \geqslant \varepsilon$. Esta subsucesión también es localmente acotada, y luego admite una subsucesión convergente que, por hipótesis, debe converger a f en $\mathscr{C}(\Omega)$, que contradice que $|f - f_{n_k}| \geqslant \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. ◂

Veamos como usarlo para demostrar el próximo teorema que probaron independientemente Giuseppe Vitali (1875–1932) en [5] y M. B. Porter en [2].

Teorema 2.9. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión localmente acotada en $\mathscr{O}(\Omega)$. Si el conjunto $A = \{z \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(z) \text{ existe}\}$ admite un punto de acumulación en Ω, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{O}(\Omega)$.*

Demostración. Es suficiente que probemos, por el criterio de Montel, que todas las subsucesiones convergentes de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a una misma función en $\mathscr{O}(\Omega)$, y esto es inmediato por el teorema de la identidad. ◂

Lema 2.10. *Sea B un disco con centro c y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de funciones holomorfas en B. Son equivalentes*

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en* $\mathscr{O}(B)$*,*

(2) Para todo $k\in\mathbb{N}$ *la sucesión de derivadas* $(f_n^{(k)}(c))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Demostración. Ya sabemos que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{O}(B)$ lo mismo es cierto para las sucesion de sus derivadas, así (1) $\implies$ (2). Para ver que (2) $\implies$ (1), notamos primero que podemos asumir que B es el disco unidad, así $c=0$, y que $\sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n|\leqslant 1$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ tenemos un desarrollo en serie de Taylor

$$f_n(z)=\sum_{k\geqslant 0}a_{nk}z^k,$$

y por hipótesis, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $a_n := \lim_{k\to\infty}a_{nk}$. Las desigualdades de Cauchy aseguran que $\sup_{k,n}|a_{nk}|\leqslant 1$, así $\sup_k|a_k|\leqslant 1$, y luego

$$f(z)=\sum_{k\geqslant 0}a_kz^k$$

define una función holomorfa en $\mathbb{E}$. Afirmamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f. En efecto, tomemos $0<r<1$ y sea $\varepsilon>0$. Existe $N>0$ tal que $(1-r)^{-1}2r^N<\varepsilon$ y, como

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}|a_{nk}-a_n|r^k=0,$$

podemos tomar N' de forma que esta suma sea también menor a ε si $n>N'$. Obtenemos entonces que si $n>N'$,

$$|f-f_n|_{B_r}\leqslant\sum_{k=0}^{N-1}|a_{nk}-a_n|r^k+2\frac{r^N}{1-r}<2\varepsilon.$$

Como todo compacto de $\mathbb{E}$ esta en algún disco B_r con $0<r<1$, esto prueba lo que queríamos. ◀

Es esencial asumir que la sucesión es acotada en el teorema anterior: la sucesión en $\mathscr{O}(\mathbb{E})$ con término general $f_n(z)=(nz)^n$ no converge puntualmente en ningún punto de $\mathbb{E}$, sin embargo para cada $k\in\mathbb{N}$ vale que $f_n^{(k)}(0)\to 0$ cuando $n\to\infty$. Estamos en condiciones de probar el siguiente teorema de Vitali, que enunciamos —como en [4]— en una forma cuya similaridad al teorema de la identidad es obvia.

Teorema 2.11 (de Vitali). *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión localmente acotada en $\mathscr{O}(\Omega)$. Son equivalentes*

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en* $\mathscr{O}(\Omega)$*.*

(2) Existe un punto $c \in \Omega$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión de derivadas $(f_n^{(k)}(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(3) El conjunto $A = \{z \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(z) \text{ existe}\}$ admite un punto de acumulación en Ω.

Demostración. Ya observamos que (1) $\implies$ (2). Por otro lado, (2) $\implies$ (3), pues si tomamos un disco B contenido en Ω en torno c donde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, el Lema 2.10 prueba que $B \subseteq A$. Finalmente, ya vimos que (3) $\implies$ (1) en el Teorema 2.9. ◂

Vale notar que los teoremas de Montel y de Vitali son equivalentes: ya vimos que el de Montel implica el de Vitali. Recíprocamente, vimos que toda sucesión de funciones holomorfas localmente acotada en Ω converge puntualmente sobre un conjunto denso de Ω. El teorema de Vitali asegura entonces que esta sucesión converge en $\mathscr{O}(\Omega)$ (y podemos dar una demostración del teorema de Vitali que no use el teorema de Montel!).

Teorema 2.12 (de Hurwitz). *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $\mathscr{O}(\Omega)$ a una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ no constante. Si $f(c) = 0$ para un $c \in \Omega$, entonces existe un disco B en Ω centrado en c y un índice $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}_{\geqslant N}$, el número de ceros de f en B es igual al número de ceros de f_n en B.*

Demostración. Existe un disco B' en Ω centrado en c tal que f no se anula en $B' \smallsetminus c$ pues f no es constante. Sea $B \subsetneq B'$ un disco con centro c y sea $m_* > 0$ tal que $|f| \geqslant m_*$ sobre ∂B. Existe N tal que si $n \in \mathbb{N}_{\geqslant N}$ entonces

$$|f - f_n|_{\partial B} < m_* < |f|_{\partial B}$$

en virtud de la convergencia local uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a f. El teorema de Rouché asegura ahora que si $n \in \mathbb{N}_{\geqslant N}$ entonces f_n y f tienen el mismo número de ceros en el interior de B. ◀

Corolario 2.13. *El límite de una sucesión de funciones nunca nulas en $\mathscr{O}(\Omega)$ es o bien una función idénticamente nula o bien nunca nula.*

Demostración. Supongamos que f no es idénticamente nula y es el límite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{O}(\Omega)$. Si f es constante, no hay nada que probar, así podemos asumir que f no es constante. En este caso, el teorema de Hurwitz asegura que si f tiene un cero en algún $c \in \Omega$, lo mismo es cierto para casi todas las funciones en $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que es imposible. ◀

Corolario 2.14. *El límite de una sucesión de funciones inyectivas (resp. localmente biholomorfas) en $\mathscr{O}(\Omega)$ es o bien constante o bien una función inyectiva (resp. localmente biholomorfa).*

Demostración. Supongamos primero que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones inyectivas que converge a una función f no constante, y tomemos un punto $c \in \Omega$. Entonces las funciones de la sucesión $(f_n - f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ son nunca nulas en $\Omega \setminus c$ y esa sucesión converge a $f - f(c)$, que no es nunca nula pues f no es constante. Por el corolario anterior, $f - f(c)$ es nunca nula en $\Omega \setminus c$. Dado que tomamos $c \in \Omega$ un punto arbitrario, esto prueba que f es también inyectiva.

Supongamos ahora que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones localmente biholomorfas que converge, como antes, a una función no constante f. En este caso la sucesión de derivadas $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f', y cada uno de sus términos es nunca nulo por ser f_n localmente biholomorfa para cada $n \in \mathbb{N}$. Como f no es constante, f' no es idénticamente nula, y luego el corolario anterior asegura que f' es, de hecho, nunca nula, así f es localmente biholomorfa, como queríamos probar. ◀

Teorema 2.15 (de inyección de Hurwitz)**.** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathscr{O}(\Omega)$ que converge a una función no constante f, y supongamos que existe $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\Omega) \subseteq \Omega'$. Entonces $f(\Omega) \subseteq \Omega'$.*

Demostración. Tomemos $c \notin \Omega'$. Por hipótesis las funciones de la sucesión $(f_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ son nunca nulas en Ω. Como $f - c$ no es idénticamente nula, pues f no es constante, deducimos que es nunca nula, asi resulta que $c \notin f(\Omega)$. Dado que elejimos a $c \notin \Omega'$ de forma arbitraria, esto prueba que $f(\Omega) \subseteq \Omega'$, que es lo que queríamos. ◀

3. Una aplicación del teorema de Vitali

Usaremos ahora el teorema de Vitali para probar un resultado general sobre intercambio de integración y diferenciación.

Proposición 3.1 (Intercambio de integración y diferenciación)**.** *Sea Ω una región en $\mathbb{C}$, γ un lazo en Ω, y $f : \gamma \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función localmente acotada. Supongamos, además, que para cada $\xi \in \gamma$ la función tal que $z \in \Omega \longmapsto f(\xi, z) \in \mathbb{C}$ es holomorfa y que las integrales $\int_\gamma f(\xi,z)d\xi$ existen para cada $z \in \Omega$. Entonces:*

- *la función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(z) = \displaystyle\int_\gamma f(\xi,z)d\xi$ es holomorfa en Ω,*
- *para cada $z \in \Omega$ existe la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\xi,z)d\xi$ y,*
- *para cada $z \in \Omega$, es $F'(z) = \displaystyle\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\xi,z)d\xi$.*

Demostración. Tomemos un disco compacto B tal que $|f|_{\gamma\times B} < \infty$. Definamos $g : [0,1] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(t,z) = f(\gamma(t),z)\gamma'(t)$, y formemos una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sumas de Riemann

$$g_n(z) = \sum g(t_{n,k}, z)\Delta s_{k,n}$$

para $\int_\gamma f(z,\xi)d\xi$. Cada función de la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que tiende puntualmente a F, es holomorfa por hipótesis. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $|g_n|_B \leqslant |f|_{\gamma\times B}|\gamma'|_I$. Así $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente acotada y por el teorema de Vitali converge uniformemente a F en B. Esto prueba que F es holomorfa. Además, la sucesión de derivadas $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste de sumas de Riemann para $\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z,\xi)d\xi$, y sabemos que converge uniformemente sobre B a F' por las estimaciones de Cauchy. Esto concluye la demostración de esta proposición. ◀

I. La función Gamma de Euler

Del análisis elemental tenemos una función $\Gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}\,du,$$

para cada $s > 0$. Además, vale que $\Gamma(1) = 1$ y que $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ para cada $s > 0$. En particular, $\Gamma(n+1) = n!$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. El siguiente teorema debido a los matemáticos daneses Harald Bohr and Johannes Mollerup, que no probaremos, caracteriza a esta función:

Teorema 3.2 (de Bohr–Mollerup)**.** *La función $\Gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ queda unívocamene determinada por las condiciones:*

- $\Gamma(1) = 1$*,*
- $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ *si* $s > 0$ *y,*
- $\log\Gamma$ *es convexa.*

Veamos como aplicar la Proposición 3.1 para extender la función Γ a una función holomorfa en el semiplano $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$, que a su vez extenderemos a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples exactamente en los enteros no positivos.

Teorema 3.3. *Para cada $z \in \mathbb{H}_+$ la integral impropia*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1}e^{-u}\,du,$$

existe y la función $\Gamma : \mathbb{H}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ así definida es holomorfa. Además, para cada $z \in \mathbb{H}_+$, vale que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y que

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty u^{z-1}e^{-u}\log u\,du.$$

Demostración. Por la Proposición 3.1, si tomamos $s, t \in (0, \infty)$, la función

$$f_{s,t}(z) = \int_s^t u^{z-1} e^{-u}] du,$$

es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Además, la familia de funciones

$$\{f_{s,t} : 0 < s < t < \infty\}$$

es localmente acotada en $\mathbb{H}_+$: en cada franja $F = \{z \in \mathbb{C} : 0 < a \leqslant \Re z \leqslant b\}$, una estimación estándar asegura que

$$|f_{s,t}|_F \leqslant \int_0^1 u^{a-1} e^{-u}\, du + \int_1^\infty u^{b-1} e^{-u}\, du.$$

Como para cualquier par de sucesiones $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0, \infty)$ que convergen a 0 e ∞ respectivamente, la sucesión $(f_{\varepsilon_n, R_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente sobre $(0, \infty)$ a Γ, el teorema de Vitali asegura que esta sucesión converge en $\mathscr{O}(\mathbb{H}_+)$ a Γ. Esto prueba, por un lado, que Γ es holomorfa y, por otro, que la derivada Γ' puede calcularse como lo afirma el enunciado: podemos aplicar la Proposición 3.1 a cada elemento de la sucesión $(f_{\varepsilon_n, R_n})_{n\in\mathbb{N}}$. La validez de la ecuación $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ para $z \in \mathbb{H}_+$ se deduce de su validez en $(0, \infty)$ y el teorema de la identidad. ◀

Corolario 3.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, la función*

$$\Gamma_n : z \in \{z \in \mathbb{C} : \Re z > -n\} \longmapsto \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \in \mathbb{C}$$

es meromorfa con polos simples en los enteros $0, -1, \ldots, -n+1$, y coincide con la función Γ en $\mathbb{H}_+$. Así, existe una función meromorfa $\Gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $P_\Gamma = \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ tal que

- $\Gamma(1) = 1$,
- $\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u}\, du$ *si* $z \in \mathbb{H}_+$ *y*
- $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ *para todo* $z \notin \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\Gamma(z)$ está definida para $\Re z > 0$, la función del enunciado está definida para $\Re z > -n$, y la ecuación funcional de Γ prueba que coincide con $\Gamma(z)$ si $\Re z > 0$. Esta función es meromorfa y tiene polos simples en los enteros $0, -1, \ldots, -n+1$, pues Γ no se anula sobre $\mathbb{N}$, y estos son todos ellos, pues Γ es holomorfa en $\mathbb{H}_+$. Finalmente, del teorema de la identidad deducimos que tenemos bien definida una función meromorfa $\Gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $P_\Gamma = \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ con las propiedades deseadas. ◀

II. Fórmula de reflexión

Para continuar el estudio de la función Γ, consideramos otra función especial, la ***función Beta***. Definimos $B : (0, \infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$B(s,t) = \int_0^1 u^{s-1}(1-u)^{t-1}\,du.$$

Un argumento completamente análogo al que hicimos para la función Γ prueba la primera parte del siguiente resultado.

Proposición 3.5. *La función $B : \mathbb{H}_+ \times \mathbb{H}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$B(z,w) = \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^{w-1}\,du$$

para $z, w \in \mathbb{H}_+$ es holomorfa. Además, vale que

$$\Gamma(z+w)B(z,w) = \Gamma(z)\Gamma(w)$$

para cada $z, w \in \mathbb{H}_+$.

Demostración. Como dijimos, la primera parte se deduce de un argumento análogo al que ya hicimos. Para ver la segunda parte, veamos que la igualdad vale para $s,t \in (0,\infty)$. En este caso,

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{s-1}v^{t-1}e^{-u-v}\,dv\,du \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 u^{t+s-1}v^{s-1}(1-v)^{t-1}e^{-u}\,dv\,du \\ &= \Gamma(s+t)B(s,t),\end{aligned}$$

donde en el segundo paso usamos el cambio de coordenadas

$$(u,v) \in (0,\infty)\times(0,1) \longmapsto T(u,v) = (uv, u(1-v)).$$

Esto prueba la ecuación deseada en el caso real, y usando el teorema de la identidad deducimos que vale para cada $z,w \in \mathbb{H}_+$. ◀

Usando esto podemos probar la siguiente ***fórmula de reflexión***.

Teorema 3.6 (Fórmula de reflexión)**.** *Para todo $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}$, vale que*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

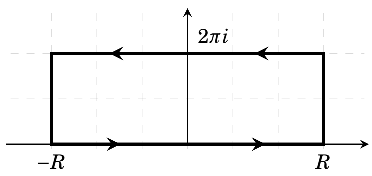
Demostración. Por el teorema de la identidad, basta con que lo probemos si $s \in (0,1)$. En tal caso $1-s \in (0,1)$ y por la Proposición 3.5, tenemos que

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(s,1-s) = \int_0^1 \left(\frac{u}{1-u}\right)^s \frac{du}{u}.$$

El cambio de variables $\dfrac{u}{1-u} = e^v$ transforma a esta integral en

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{vs}}{1+e^v}\,dv.$$

Veamos que tiene el valor buscado usando el Teorema de los Residuos. La función meromorfa $f(z) = \dfrac{e^{sz}}{1+e^z}$ tiene un polo simple en πi con residuo $-e^{\pi i s}$. Dado $R > 0$, consideremos un rectángulo con base en $[-R,R]$ y altura $2\pi i$, como en la figura.



Como e^z tiene a $2\pi i$ como período, la contribución de la base y el lado opuesto a la integral de f sobre el rectángulo es

$$\left(1-e^{2\pi i s}\right)\int_{-R}^{R}\frac{e^{vs}}{1+e^{v}}\,dv.$$

Por otro lado, las integrales sobre los dos lado restantes tienden a cero cuando $R\to\infty$ por una simple estimación y el hecho que $0<s<1$. Lo anterior junto con el Teorema de los Residuos ahora asegura que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{vs}}{1+e^{v}}\,dv=-\frac{2\pi i e^{i\pi s}}{1-e^{2\pi i s}}=\frac{\pi}{\sin\pi s},$$

que es lo que queríamos probar. ◄

Podemos también calcular los residuos de Γ en sus polos, y usando la formula de reflexión, probar que no tiene ceros.

Proposición 3.7. *La función Γ es nunca nula y, para cada $n\in\mathbb{N}_0$, es* $\operatorname{Res}(\Gamma,-n)=\frac{(-1)^n}{n!}$.

Demostración. La fórmula de reflexión prueba que Γ es nunca nula: sabemos que en los enteros positivos es no nula, y que en los enteros restantes tiene polos, así que basta ver que no se anula en los puntos restantes. Pero si z no es entero, entonces $\pi/\sin\pi z\neq 0$, y luego $\Gamma(z)\neq 0$ por la fórmula de reflexión. Para probar la afirmación sobre los residuos en los polos, tomemos $n \in \mathbb{N}_0$. Calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z\to -n}(z+n)\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}\\
&= \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\\
&= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)}\\
&= \frac{(-1)^n}{n!},
\end{aligned}$$

como queríamos. ◀

4. El teorema de Riemann

El objetivo de esta sección es probar el siguiente teorema de Riemann.

Teorema 4.1 (de la aplicación conforme de Riemann)**.** *Todo abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ distinto de $\mathbb{C}$ es biholomorfo al disco unidad.*

Dado que toda función biholomorfa es un homeomorfismo, si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y biholomorfo a $\mathbb{E}$, entonces Ω tiene que ser también simplemente conexo, así esta condición es necesaria. Por el teorema de Liouville, no existen funciones holomorfas no constantes $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{E}$, así también es necesario que Ω no sea todo $\mathbb{C}$: una de las características notables del resultado de Riemann es que prueba que estas dos condiciones son también suficientes.

Dado que toda función holomorfa sobre un conjunto simplemente conexo admite primitivas, obtenemos en particular que

Lema 4.2. *Toda función holomorfa nunca nula sobre un abierto simplemente conexo admite una raíz cuadrada holomorfa.*

Demostración. Sea Ω un abierto simplemente conexo, y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y nunca nula. Entonces $g = f'/f$ es holomorfa y nunca nula, y podemos elegir $G : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una primitiva de g tal que $\exp G = f$, es decir, tal que G es un logaritmo de f. La función $\exp(G/2)$ nos da entonces una raíz cuadrada holomorfa de f, como queríamos. ◀

Digamos que un abierto Ω de $\mathbb{C}$ que contiene al origen y cumple lo anterior es un Q-dominio. La hipótesis que $0 \in \Omega$ no es restrictiva, ya que si Ω es una región con la propiedad anterior y $c \in \Omega$, una traslación por c da otra región con la misma propiedad, biholomorfa a Ω y que contiene al origen. Probaremos, de hecho, que

Teorema 4.3. *Todo Q-dominio de $\mathbb{C}$ distinto de $\mathbb{C}$ es biholomorfo al disco unidad.*

En particular, todo Q-dominio es simplemente conexo: es interesante que notemos que una condición algebraica sobre el álgebra de funciones $\mathscr{O}(\Omega)$, a saber, que toda unidad admita una raíz cuadrada, nos da un resultado puramente geométrico sobre Ω.

I. Existencia

De ahora en adelante, fijamos un Q-dominio Ω que no es $\mathbb{C}$. Notamos por t_c para $c \in \mathbb{E}$ al automorfismo involutivo de $\mathbb{E}$ tal que $t_c(z) = \frac{z-c}{\bar{c}z-1}$ para cada $z \in \mathbb{E}$. Nuestro ahora objetivo será probar que existen funciones biholomorfas $\Omega \longrightarrow \mathbb{E}$. Veamos primero que

Lema 4.4. *Existe una función holomorfa e inyectiva $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ tal que $f(0) = 0$.*

Demostración. Tomemos $a \notin \Omega$, y sea $g(z) = z - a$. Como g es nunca nula en Ω, admite una raíz, esto es, existe $v \in \mathscr{O}(\Omega)$ tal que $v^2(z) = z - a$ para cada $z \in \Omega$. En particular, v es inyectiva y, además, $(-v)(\Omega) \cap v(\Omega) = \varnothing$. En efecto, si existieran $c, c' \in \Omega$ tal que $v(c) = -v(c')$ resultaría, al elevar al cuadrado, que $c - a = c' - a$, esto es, que $c = c'$. Pero entonces $v(c) = 0$, que es imposible.

Como el conjunto $(-v)(\Omega)$ es abierto y no vacío, existe un disco B tal que $v(\Omega)$ está contenido en $\mathbb{C} \smallsetminus \overline{B}$, digamos que $B = B(w, r)$. La función

$$g(z) = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{z-c} - \frac{1}{v(0)-c}\right)$$

es holomorfa y lleva $\mathbb{C} \smallsetminus \overline{B}$ a $\mathbb{E}$ de forma inyectiva. La función buscada es entonces $f = g \circ v$. ◂

Resulta ahora que la familia de funciones

$$\mathscr{F}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{E} : f \text{ holomorfa, inyectiva con } f(0) = 0\}$$

es no vacía. La función biholomorfa $\Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ deseada puede obtenerse resolviendo un problema extremal sobre $\mathscr{F}(\Omega)$:

Proposición 4.5. *Si $w \in \Omega$ no es el origen, toda función en $\mathscr{F}(\Omega)$ que maximiza el funcional*

$$\begin{aligned} |\mathrm{ev}_w| : &\mathscr{F}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &f \longmapsto |f(w)| \end{aligned}$$

es sobreyectiva y luego biholomorfa.

Daremos la demostración en varios pasos. Por el momento, veamos la utilidad que tienen el teorema de Montel y los teoremas de Hurwitz que obtuvimos en las secciones anteriores en nuestro contexto.

Lema 4.6. *La familia $\mathscr{F}(\Omega)$ es localmente acotada, de hecho, es acotada. Además, es cerrada, y luego $\mathscr{F}(\Omega)$ es compacto. Así, existen funciones en $h \in \mathscr{F}(\Omega)$ que resuelven el problema extremal de la Proposición 4.5.*

Demostración. Dado que toda función de $\mathscr{F}(\Omega)$ toma valores en $\mathbb{E}$, esta familia es evidentemente acotada. El teorema de Montel asegura entonces que $\mathscr{F}(\Omega)$ tiene clausura compacta en $\mathscr{O}(\Omega)$. Por otro lado, el Teorema 2.15 y el Corolario 2.14 prueban que la familia $\mathscr{F}(\Omega)$ es cerrada. ◂

Tomemos ahora un Q-dominio $\Omega' \subseteq \mathbb{E}$. Una función $f \in \mathscr{F}(\Omega')$ se dice una ***expansión*** si para todo $z \in \Omega'$ distinto de 0, vale que $|f(z)| > |z|$. Construiremos expansiones propias usando el siguiente lema.

Lema 4.7. *Sea $s : z \in \mathbb{E} \longmapsto z^2 \in \mathbb{E}$ y sea $c \in \mathbb{E}$. Entonces $\psi_c = t_{c^2} \circ s \circ t_c$ es una* contracción*, esto es, cumple que $\psi_c(0) = 0$ y que $|\psi_c(z)| < |z|$ si $z \in \mathbb{E}$ y $z \neq 0$.*

Demostración. Como s no es un automorfismo de $\mathbb{E}$, ψ_c en particular no es una rotación, así podemos concluir lo que queremos por el Lema de Schwarz. ◄

Lema 4.8. *Sea $c \in \mathbb{E}$ tal que $c^2 \notin \Omega'$ y sea $v \in \mathscr{O}(\Omega)$ la raíz cuadrada de la restricción $t_{c^2}|_{\Omega'}$ con $v(0) = c$. Entonces*

- $\kappa = t_c \circ v : \Omega' \longrightarrow \mathbb{E}$ *es una expansión.*
- $\psi_c \circ \kappa = \mathrm{id}_{\Omega'}$.

Demostración. Como t_{c^2} no se anula en Ω y $t_{c^2}(0) = c^2$, v existe y está bien definida, y como $v(\Omega) \subseteq \mathbb{E}$, también lo está κ, que cumple que $\kappa(\Omega) \subseteq \mathbb{E}$ y $\kappa(0) = 0$. Como $t_c \circ t_c = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ y como $s \circ v = t_{c^2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\psi_c \circ \kappa &= t_{c^2} \circ s \circ t_c \circ t_c \circ v \\ &= t_{c^2} \circ s \circ v \\ &= t_{c^2} \circ t_{c^2} \\ &= \mathrm{id}_{\Omega}\end{aligned}$$

que prueba que κ es inyectiva. Además, como ψ_c es una contracción, si $z \neq 0$ tenemos que

$$|z| = |\psi_c(\kappa(z))| < |\kappa(z)|,$$

que prueba que κ es una expansión. ◄

Podemos dar ahora la

Demostración de la Proposición 4.5. Ya sabemos que existe una función $f \in \mathscr{F}(\Omega)$ que maximiza a $|\mathrm{ev}_w|$, es decir, que cumple que $|f(w)| \geqslant |g(w)|$ para toda otra $g \in \mathscr{F}(\Omega)$. Supongamos que $f(\Omega) = \Omega'$ no es todo $\mathbb{E}$. Como f es inyectiva, Ω y Ω' son biholomorfos, así Ω' también es un Q-dominio. Como $\Omega' \neq \mathbb{E}$, podemos tomar $c \in \mathbb{E}$ tal que $c^2 \notin \Omega'$, y el Lema 4.8 prueba que existe una expansión inyectiva $\kappa : \Omega' \longrightarrow \mathbb{E}$. Así $h = \kappa \circ f \in \mathscr{F}(\Omega)$, y como $f(0) = 0$ y f es inyectiva, resulta que $f(w) \neq 0$. Todo esto implica que

$$|h(w)| = |\kappa(f(w))| > |f(w)|,$$

y contradice el hecho que f maximiza a $|\mathrm{ev}_w|$. Deber ser el caso, entonces, que f es sobreyectiva. ◀

Queda demostrado así el Teorema 4.3.

II. Unicidad

El siguiente teorema extiende el Teorema 4.3 para incluir un resultado de unicidad. Recordemos que Ω es una Q-región que no es todo $\mathbb{C}$.

Teorema 4.9. *Para cada $c \in \Omega$ existe una única función biholomorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ tal que $f(c) = 0$ y $f'(c) > 0$.*

Demostración. Sea g otra función biholomorfa $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ tal que $g(c) = 0$ y $g'(c) > 0$, y consideremos la función biholomorfa $h = f \circ g^{-1} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$. Como $h(0) = 0$, el Lema de Schwarz asegura que h es una rotación por algún $\lambda \in \partial E$, y en este caso $h'(0) = f'(c)/g'(c) = \lambda > 0$, así $\lambda = 1$ y h es la identidad, esto es $f = g$.

Basta entonces ver que existe una función biholomorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ tal que $f(c) = 0$ y $f'(c) > 0$. Podemos asumir que $c = 0 \in \Omega$, y en ese caso ya sabemos que existe una tal h al menos con $h(0) = 0$. Si $h'(0) = |h'(0)|e^{i\theta}$ entonces $f = e^{-i\theta}h : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ es biholomorfa y cumple que $f(0) = 0$ y que $f'(0) = e^{-i\theta}h'(0) = |h'(0)| > 0$. ◀

Referencias

[1] John B. Conway, *Functions of one complex variable*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. MR503901

[2] M. B. Porter, *Concerning series of analytic functions*, Ann. of Math. (2) **6** (1905), no. 4, 190–192, DOI 10.2307/2007247. MR1503557

[3] Reinhold Remmert, *Theory of complex functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the second German edition by Robert B. Burckel; Readings in Mathematics. MR1084167

[4] ———, *Classical topics in complex function theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 172, Springer-Verlag, New York, 1998. Translated from the German by Leslie Kay. MR1483074

[5] G. Vitali, *Sulle serie di funzioni analitiche*, Rend. Ist. Lombardo **2** (1903), 771–774.