CLASE PÚBLICA 7-09

MARTÍN MANSILLA

La idea de esta clase será comenzar a rondar las vastas tierras de la integración compleja. El eje lo pondremos en comprender las definiciones, el cálculo básico y reconocer algunas particularidades que en este nuevo contexto se presentan.

Definición 1. Dada una función $w : [a, b] \to \mathbb{C}$ contínua y dados $a \leq a_0 \leq b_0 \leq b$ definimos la integral de w desde a_0 hasta b_0 como el número complejo

$$\int_{a_0}^{b_0} w(t)dt := \int_{a_0}^{b_0} \mathrm{Re}(w(t))dt + i \int_{a_0}^{b_0} \mathrm{Im}(w(t))dt.$$

En la definición $[a, b]$ podría ser también $(-\infty, \infty), [a, \infty)$ o $(-\infty, b]$. Una función como w de la definición es la parametrización de una curva compleja por que depende de un parámetro real y su imagen está dentro de $\mathbb{C}$.

Pedimos que w sea contínua de manera exagerada (aunque no tanto) por que de esta manera tenemos que las funciones reales $\mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(w) : [a, b] \to \mathbb{R}$ son contínuas y esto asegura la existencia de sus integrales. Sabiendo entonces integrar funciones de variable real definimos la integral para funciones que lleguen a los complejos a través. Así, como ya mencionamos en otras ocaciones, logramos definir este nuevo concepto en el nuevo contexto de funciones llegando a los números complejos de forma hereditaria: nuevamente $\mathbb{C}$ viste las ropas de su hermana más añosa, $\mathbb{R}$.

Date: September 2018.

Ejemplo 2. Sea $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que en cierto $t \in \mathbb{R}$ vale $w(t) = e^{it} + 2t^2$. Calculemos la integrald de w desde 0 hasta π.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi w(t)dt &= \int_0^\pi (e^{it} + 2t^2)dt \\
&= \int_0^\pi \big(\cos(t) + 2t^2 + i\sin(t)\big)dt \\
&= \int_0^\pi \big(\cos(t) + 2t^2\big) + i\int_0^\pi \sin(t)dt \\
&= \big(\sin(t) + \frac{2}{3}t^3\big)\Big|_0^\pi + i\big(-\cos(t)\big)\Big|_0^\pi dt \\
&= \frac{2\pi^3}{3} - i2.
\end{aligned}$$

Pregunta 3. ¿Qué hacemos entonces para integrar funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$?

La respuesta no es una sola, el camino que tomaremos en esta materia será el de integrarlas sobre curvas. Tenemos entonces la siguiente definición

Definición 4. Dada $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función contínua y $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$ a trozos de forma que $\gamma([a, b]) \subset \Omega$ definimos

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Observemos que $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ está bien definido ya que $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ es una parametrización de una curva compleja contínua y sabemos integrar este tipo de funciones.

La integral compleja tiene la propiedad útil de la linealidad. Es decir si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son contínuas y $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$ a trozos de forma que $\gamma([a, b]) \subset \Omega$ vale

$$\int_\gamma (f(z) + z_0 g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + z_0 \int_\gamma g(z)dz. \tag{1}$$

Estudiemos un ejemplo que, si bien parece inofensivo, guarda mucha de la riqueza de la teoría del análisis complejos.

Ejemplo 5. Consideremos $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{1}{z}$ calculemos su integral sobre la curva $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_1(t) = e^{it}$. La imagen de γ_1 es el circulo de radio 1 centrado en 0 y está incluída en el dominio de f, por lo tanto podemos calcular la integral de f a lo largo de

γ_1, hagámoslo. Notemos que $\gamma_1'(t) = ie^{it}$, lo cuál será útil para el cálculo

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}dt \\ &= \int_0^{2\pi} idt \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

Pregunta 6. ¿Qué sucede si cambiamos la parametrización γ_1 por otra?

Consideremos las curvas $\gamma_2, \gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ con fórmula $\gamma_2(t) = e^{-it}$ y $\gamma_3(t) = e^{3it}$. Observemos que las tres parametrizaciones tienen la misma imagen, o sea

$$\gamma_1([0, 2\pi]) = \gamma_2([0, 2\pi]) = \gamma_3([0, 2\pi]) = S^1.$$

Sin embargo la lectora cuidadosa puede reproducir las cuentas que llevan a concluir que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}dz &= -2\pi i = -\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}dz \\ \int_{\gamma_3} \frac{1}{z}dz &= 6\pi i = 3\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}dz\end{aligned}$$

(*Sugerencia:* Sólo basta observar que $\gamma_2'(t) = -ie^{-it}$ y $\gamma_3'(t) = 3ie^{3it}$)

Observemos que la diferencia entre γ_1 y γ_2 es que una y otra recorren S^1 en sentidos diferentes. Por otro lado, entre γ_1 y γ_3 la diferencia es que γ_1 recorre una sola vez su imagen, mientras que γ_3 lo hace 3 veces lo cual podemos notar viendo que $\gamma_3([0, \frac{2\pi}{3}]) = \gamma_3([\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]) = \gamma_3([\frac{4\pi}{3}, 2\pi]) = S^1$. La integral de la función $\frac{1}{z}$ a lo largo de la parametrización de las curvas da cuenta de la cantidad de vueltas que da la curva en torno al 0 y más aún en que sentido.

Diremos que cierta parametrización de una curva compleja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$, y diremos que es simple si γ es inyectiva en (a, b) (en otras palabras no se cruza a sí misma salvo quizás en sus extremos). Esto nos lleva a una definición precisa del índice de una parametrización respecto de cietro punto.

Definición 7. Dada : $[a, b] \to \mathbb{C}$ cerrada y $\mathcal{C}^1$ a trozos y cierto punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 \notin \gamma([a, b])$ definimos el índice de γ respecto de z_0 como

$$\eta(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi 1} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}dz.$$

Hasta ahora hablamos de integración de funciones compleja sobre parametrizaciones de curvas, es decir cierto tipo de funciones. Definamos ahora lo que es integrar una función compleja sobre una curva, es decir un cierto conjunto de $\mathbb{C}$.

Definición 8. Una parametrización regular es una función $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos tal que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t en donde resulte derivable. Una curva regular compleja es un conjunto $C \in \mathbb{C}$ de forma que existe cierta parametrización $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ regular que lo tiene como imagen, es decir $C = \gamma([a, b])$. Una reparametrización de C es cierta $\alpha : [c, d] \to \mathbb{C}$ tal que existe $\phi : [c, d] \to [a, b]$ biyectiva, $\mathcal{C}^1$ de forma que $\phi'(t) \neq 0$ para todo $t \in [c, d]$ y $\alpha = \gamma \circ \phi$.

En el Ejemplo 5 queda claro que la integral de una función compleja sobre una curva depende en cierta medida de la parametrización, sin embargo hay condiciones muy generales sobre las parametrizaciones que hacen que esta integral no dependa demasiado de la elección de la parametrización. Esto se resume en el siguiente Teorema.

Teorema 9. Dada $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos con $\gamma([a, b]) \subset \Omega$ y $\phi : [c, d] \to [a, b]$ biyectiva, $\mathcal{C}^1$ y de forma que $\phi'(t) \neq 0$ para todo $t \in [c, d]$ vale que:

- si $\phi'(t) > 0$ para todo $t \in [c, d]$ entonces $\int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$.
- si $\phi'(t) < 0$ para todo $t \in [c, d]$ entonces $\int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$.

Corolario 10. El índice de una curva es invariante por reparametrizaciones.

El Teorema 9 nos obliga a aclarar, siempre que hablemos de la integral de cierto función sobre una curva de su orientación. Dada una curva regular C hablamos de la orientación positiva de la curva cuando consideremos parametrizaciones que la recorren en sentido antihorario, en caso contrario decimos que la orientación es negativa. Cuando integramos cierta f sobre C con orientación positiva lo notamos $\int_{C^+} f(z)dz$, si lo hacemos con orientación negativa $\int_{C^-} f(z)dz$ y vale

$$\int_{C^+} f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz.$$

Ejemplo 11. calcular la integral de la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^z \cos(z)(\cos(z) - 2\sin(z))$ sobre la semicircunferencia de radio 1 centrada en 0 de parte imaginaria positiva recorrida con orientación positiva.

En primer lugar $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = e^{it}$ es una parametrización de la semicircunferencia, luego una posibilidad será calcular $\int_\gamma f(z)dz$. Rápidamente podemos notar la que dificultad de resolver las integrales evaluando la función en la parametrización es excesiva. El truco en este caso será notar que $f(z) = e^z \cos(z)^2 - 2e^z \cos(z)(z) = F'(z)$ con $F(z) = e^z \cos(z)$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^\pi F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_0^\pi (F \circ \gamma)'(t)dt \\
&= \int_0^\pi \mathrm{Re}(F \circ \gamma)'(t)dt + i \int_0^\pi \mathrm{Im}(F \circ \gamma)'(t)dt \\
&= \mathrm{Re}(F \circ \gamma)(t)\Big|_0^\pi + i\mathrm{Im}(F \circ \gamma)(t)\Big|_0^\pi \\
&= F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)) = e^\pi - 1,
\end{aligned}$$

donde usamos el Teorema fundamental del cálculo para una variable.

La idea en el ejemplo anterior es usar que, al igual que en variable real, de existir una primitiva, la integral resulta evaluar la primitiva en los bordes.

Definición 12. Dada una curva regular C con cierta parametrización regular $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ decimos que la longitud de C es

$$\mathrm{long}(C) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Observemos que con esta definición tenemos

$$\Big| \int_{C^+} f(z)dz \Big| = \Big| \int_{C^-} f(z)dz \Big| \leq \sup_{z \in C} |f(z)| \mathrm{long}(C).$$