Series de funciones y modos de convergencia

Pedro Tamaroff

18 de abril de 2017

I. Radio de convergencia de una serie de potencias

En lo que sigue fijamos una serie de potencias $f(z) = \sum_{\nu\geqslant 0} a_\nu z^\nu$. Definimos el *radio de convergencia* de f como el supremo del conjunto $\{t \geqslant 0 : |a_\nu|t^\nu \text{ es acotada}\}$, y lo notamos R_f. Veamos que este número es la elección apropiada de un "radio de convergencia". Comenzamos con un lema preliminar.

Lema 1. *(Abel) Si existe una constante positiva s tal que la sucesión $(|a_\nu|s^\nu)$ se mantiene acotada, la serie f converge absolutamente en cualquier disco centrado en el origen y de radio menor a s.*

Demostración. Dado $0 < r < s$, sea $q = rs^{-1}$. Entonces $0 < q < 1$, y si M es una constante tal que $|a_\nu|s^\nu \leqslant M$ para todo $\nu \geqslant 0$, deducimos que

$$|a_\nu|r^\nu = |a_\nu|s^\nu q^\nu \leqslant Mq^\nu$$

para todo número natural ν. Como la serie geométrica de parámetro q converge, lo mismo es cierto para la serie con término general $|a_\nu|r^\nu$, como queríamos. ◀

Del lema anterior, deducimos que si f converge para algún z_0 no nulo, converge en todo punto de la bola $B(0,|z_0|)$. Además, ahora es claro el siguiente resultado, que afirma que $B(0,R_f)$ es el disco abierto más grande donde f converge.

Teorema 1. *La serie f converge absolutamente en $B(0,R_f)$ y diverge en todo punto fuera de $\overline{B}(0,R_f)$. Además, ${R_f}^{-1}$ es igual al límite superior de la sucesión $(|a_\nu|^{1/\nu})$.*[1]

La última afirmación del teorema anterior se debe a Cauchy y Hadamard. El cálculo de R_f se fácilita con el siguiente *criterio del cociente de D'Alambert*.

Proposición 1. *Supongamos que la sucesión $(a_\nu)_{\nu\geqslant 0}$ es eventualmente no nula. Si existe $\lim_{\nu\to\infty}\left|\dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|$ entonces es igual a R_f. Más precisamente, vale que*

$$\liminf_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \leqslant \liminf_{\nu\to\infty}|a_\nu|^{1/\nu} \leqslant \limsup_{\nu\to\infty}|a_\nu|^{1/\nu} \leqslant \limsup_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|.$$

Para poner en uso el resultado anterior en un ejemplo, fijemos un número complejo σ, y pongamos para todo natural ν,

$$\binom{\sigma}{\nu} = \frac{\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-\nu+1)}{\nu(\nu-1)\cdots 1},$$

que llamamos un *coeficiente binomial*. Definimos la *serie binomial de parámetro σ* por

$$b_\sigma(z) = \sum_{\nu\geqslant 0}\binom{\sigma}{\nu}z^\nu.$$

Notemos que si σ es natural, entonces b_σ es un polinomio, a saber, $(1+z)^\sigma$, y si σ no es natural, es una serie infinita.

Proposición 2. *Si σ no es natural la serie b_σ tiene radio de convergencia* 1.

Demostración. Como σ no es natural la sucesión de coeficientes es nunca nula. Calculamos los cocientes sucesivos de b_σ:

$$\frac{\binom{\sigma}{\nu}}{\binom{\sigma}{\nu+1}} = \frac{\nu+1}{\sigma-\nu},$$

de dónde deducimos que $\lim_{\nu\to\infty}|a_\nu/a_{\nu+1}| = 1$. Por el criterio de D'Alambert, el radio de convergencia de b_σ es 1, como se dijo. ◀

[1]Por convención, $0^{-1} = \infty$ y $\infty^{-1} = 0$.

II. Derivación e integración de una serie de potencias

Escribamos f' a la serie de potencias que se obtiene de derivar formalmente cada término de la serie f, y F a la serie de potencias que se obtiene de integrar formalmente cada término de la serie f, así

$$f' = \sum_{\nu \geqslant 0} \nu a_\nu z^\nu, \qquad\qquad F = \sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu \frac{z^{\nu+1}}{\nu+1}.$$

Proposición 3. *El radio de convergencia de f' y el de F son iguales, y coinciden con el de f.*

Demostración. Como $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{\nu+1} = 1$, deducimos por la desigualdad de D'Alambert que $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty} \nu^{1/\nu} = 1$. Así que la igualdad $R_f = R_{f'}$ se sigue inmediatamente de la fórmula de Cauchy–Hadamard, mientras que $R_F = R_f$ porque $F' = f$. ◀

Ejercicio 1. Sea $t > 0$. Probar que $(|a_\nu|t^\nu)$ es acotada si $(\nu|a_\nu|t^{\nu-1})$ es acotada, y que si $0 < s < t$ y si $(|a_\nu|t^\nu)$ es acotada, entonces $(\nu|a_\nu|s^{\nu-1})$ es acotada, para dar una nueva demostración de la última proposición.

Como ejemplo, veamos que, al menos formalmente, $b'_\sigma = \sigma b_{\sigma-1}$. De la definición del coeficiente binomial, obtenemos que $\displaystyle\frac{\nu}{\sigma}\binom{\sigma}{\nu} = \binom{\sigma-1}{\nu-1}$, y entonces

$$b'_\sigma = \sum_{\nu \geqslant 1} \nu \binom{\sigma}{\nu} z^{\nu-1} = \sum_{\nu \geqslant 1} \sigma \binom{\sigma-1}{\nu-1} z^{\nu-1} = \sigma b_{\sigma-1}.$$

Veamos ahora que f define una función holomorfa en su disco de convergencia $B = B(0, R_f)$.

Proposición 4. *La función $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y su derivada es la función que define f' en B, es decir, la serie de potencias que se obtiene derivando término a término a la serie f.*

Demostración. Fijemos un número complejo $w \in B$, y tomemos z en B, así existe $s < R_f$ tal que $|w|, |z| < s$. Recordemos que para cualquier natural ν vale que

$$\frac{z^\nu - w^\nu}{z - w} = z^{\nu-1} + z^{\nu-2} w + \cdots + z w^{\nu-2} + w^{\nu-1},$$

y escribamos a este polinomio $q_\nu(z)$, así en particular $q_0(z) = 0$ y $q_1(z) = 1$. Entonces resulta que

$$f(z) = f(w) + (z-w)\sum_{\nu\geqslant 1} a_\nu q_\nu(z).$$

Además, como $q_\nu(w) = \nu w^{\nu-1}$, al menos es cierto que $f'(w) = f_1(w)$ donde $f_1(z) = \sum_{\nu\geqslant 1} a_\nu q_\nu(z)$. Para ver que f es derivable en w y su derivada es $f'(w)$, es suficiente que verifiquemos que $f_1(z)$ es continua en B. Pero si $|z|, |w| < s$, podemos dar la cota $|q_\nu(z)| \leqslant \nu s^{\nu-1}$, y luego

$$\sum_{\nu\geqslant 1} |a_\nu||q_\nu(z)| \leqslant \sum_{\nu\geqslant 1} |a_\nu|\nu s^{\nu-1} < \infty,$$

pues ya verificamos que f y f' tienen el mismo radio de convergencia. Por el criterio de Weiertrass, deducimos que $f_1(z)$ es límite uniforme de funciones continuas, así que es ella misma continua. Esto completa la demostración. ◀

De lo anterior se desprende que f es infinitamente derivable en su disco de convergencia, pues su derivada es también una serie de potencias, definida en el mismo disco que f, y que para cada natural ν,

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}.$$

Así, por ejemplo, sabemos ahora que las series

$$\ell(z) = \sum_{\nu\geqslant 0} (-1)^\nu \frac{z^\nu}{\nu}, \qquad u(z) = \sum_{\nu\geqslant 0} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1}, \qquad b_\sigma(z)$$

definen todas funciones holomorfas en el disco unidad. Queda como ejercicio verificar que la ecuación $b_\sigma(z) = \exp(\sigma\ell(z))$ es válida en el disco unidad. *Sugerencia:* pruebe que la derivada de alguna función apropiada es nula.

Ejercicio 2. Sea $g = \sum_{\nu\geqslant 0} b_\nu z^\nu$ otra serie de potencias centrada en el origen. Usando la definición del radio de convergencia, probar que las series formales,

$$f+g = \sum_{\nu\geqslant 0} (a_\nu + b_\nu) z^\nu \qquad f\cdot g = \sum_{\nu\geqslant 0} c_\nu z^\nu$$

donde $c_\nu = a_0 b_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \cdots + a_{\nu-1} b_1 + a_\nu b_0$, tienen radios de convergencia positivos, y relacionarlos con R_f y R_g.

III. Modos de convergencia

En lo que sigue, fijamos una región Ω en $\mathbb{C}$, y escribimos $\mathscr{C}(\Omega)$ y $\mathscr{O}(\Omega)$ a los conjuntos de funciones continuas y holomorfas en Ω, respectivamente. Dada $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ y un subconjunto A de Ω, escribimos $|f|_A$ al supremo de f en A. Recordemos que el límite uniforme de funciones continuas es continua, y que *el criterio de Weierstrass* afirma que si (f_ν) es una sucesión en $\mathscr{C}(\Omega)$ y si $\sum |f_\nu|_A < \infty$ para algún subconjunto A de Ω, entonces la serie $f = \sum f_\nu$ converge uniformemente en A y define allí una función continua, visto que las sumas parciales de f tienden a ella uniformemente, y son funciones continuas en A. Con estas ideas, definimos dos modos de convergencia en $\mathscr{C}(\Omega)$ que resultan ser buenos para nuestros fines, en un sentido que haremos preciso más adelante.

Definición 1. Una sucesión (f_n) en $\mathscr{C}(\Omega)$ converge de forma *localmente uniforme* en Ω a $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ si todo punto $z \in \Omega$ admite un entorno abierto U tal que $f_n|_U$ converge uniformemente a $f|_U$.

Como el límite uniforme de funciones continuas es continua, y la continuidad es una propiedad local, si (f_n) es una sucesión en $\mathscr{C}(\Omega)$ que converge de forma localmente uniforme a f, resulta que f también pertenece a $\mathscr{C}(\Omega)$. Puede probarse que esta noción de convergencia proviene de una métrica en $\mathscr{C}(\Omega)$, y que con esta métrica $\mathscr{C}(\Omega)$ resulta un espacio métrico completo.

Veremos más adelante que el límite localmente uniforme de funciones en $\mathscr{O}(\Omega)$ está en $\mathscr{O}(\Omega)$ —en este sentido, esta noción de convergencia es buena: el subespacio de funciones holomorfas es cerrado respecto a ella, y entonces también completo. Por el momento, consideremos un ejemplo.

Ejercicio 3. Supongamos que en la definicion de convergencia localmente uniforme reemplazamos la condicion de que U sea abierto por la condición de que sea *compacto*. Probar que esta nueva noción de convergencia, que llamamos convergencia compacta, coincide con la de convergencia localmente uniforme.

Proposición 5. *Sea* $\Omega_0 = \mathbb{C} \smallsetminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ *y consideremos la sucesión de funciones* $f_\nu \in \mathscr{O}(\Omega_0)$ *tal que* $g_\nu(z) = \dfrac{(-1)^\nu}{z+\nu}$. *Entonces la serie de funciones* $g = \sum_{\nu \geqslant 0} f_\nu$ *converge de forma localmente uniforme en* Ω_0.

Demostración. Comencemos observando que todo compacto de $\mathbb{C}$ está contenido en un semiplano vertical abierto de la forma $A = \{z \in \Omega_0 : \Re z > a\}$, y por el Ejercicio 3, alcanza con probar que la convergencia es uniforme en cualquiera de ellos. Cada una de estas franjas contiene a lo sumo finitos enteros negativos, así descartando finitos términos de nuestra serie, que no afecta la convergencia de la misma, podemos asumir que $a > 0$.

Escribamos G_ν a la ν-ésima suma parcial de g, y observemos que, como

$$\frac{1}{z+2\nu} - \frac{1}{z+2\nu+1} = \frac{1}{(z+2\nu)(z+2\nu+1)},$$

podemos escribir

$$G_{2\nu-1} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{1}{(z+2\mu)(z+2\mu+1)}, \qquad G_{2\nu} = G_{2\nu-1} + \frac{1}{z+2\nu}.$$

Tomemos ahora un z en A, así $\Re z > a > 0$. Entonces para cualquier natural ν, tenemos que $|z+\nu|^2 = (x+\nu)^2 + y^2 > (a+\nu)^2$. Para concluir, notamos que la serie $\sum_{\nu \geqslant 0} \frac{1}{(a+\nu)^2}$ es convergente, y cuando consideremos una diferencia $|G_\mu - G_\nu|_A$ para $\nu > \mu \gg 0$, podremos acotarla por una cola de ésta última serie y posiblemente un término de la forma $(a+\nu)^{-1}$, que prueba la convergencia uniforme. ◂

De lo anterior se desprende que la serie de funciones

$$h = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^\nu}{z+\nu}$$

converge de forma local uniforme en $\Omega_1 = \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}$ y, de hecho, que converge uniformemente en cualquier franja horizontal de la forma $A = \{z \in \Omega_1 : a < \Re z < b\}$.

En la demostración anterior no podemos usar el teorema de Weiertrass, pues la serie de normas

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z+\nu|}$$

no es sumable nunca. Nuestra segunda noción de convergencia asume que podemos hacer esto, y es mejor que la noción de convergencia local uniforme.

Definición 2. Sea (f_ν) una sucesión de funciones en $\mathscr{C}(\Omega)$. Decimos que la serie $f = \sum f_\nu$ *converge normalmente en* Ω si todo punto z de Ω admite un entorno abierto U tal que $\sum |f_\nu|_U < \infty$.

Está claro que si una serie converge normalmente en Ω, converge de forma localmente uniforme, así el límite de una serie que converge normalmente en Ω es continuo, y como dijimos antes, si cada término de la suma es una función holomorfa, también lo es la suma. Nuestro último ejemplo muestra que la convergencia normal es más fuerte que la convergencia local uniforme. Como antes, la convergencia normal puede verificarse en entornos compactos en lugar de abiertos. Además, tenemos la siguiente proposición, que muestra que la convergencia normal es "establerespecto a ciertas operaciones usuales que hacemos sobre series:

Proposición 6. *Sean (f_ν) y (g_ν) series de funciones en Ω cuyas series de sumas parciales convergen normalmente en allí. Entonces*

(1) La serie de sumas parciales de $(f_\nu + g_\nu)$ converge normalmente en Ω.

(2) Si (h_ν) es una serie de funciones donde cada producto $f_\mu g_\tau$ aparece una sola vez, entonces la serie de sus sumas parciales de converge normalmente en Ω al producto de las serie de (f_ν) con la de (g_ν).

(3) Si $(f_{\sigma(\nu)})$ es un reordenamiento de (f_ν), entonces converge normalmente en Ω al mismo límite que ésta.

Ejercicio 4. Probar que las siguientes series convergen normalmente en Ω_1.

$$s(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\nu)^2}, \qquad t(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\nu \neq 0} \left(\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu} \right)$$

Sugerencia: Intente imitar la demostración de la Proposición 5.