Práctica 7: Resolubilidad - Dedekind - Regla y compás

En los siguientes dos ejercicios, $\{t_1,\dots,t_n\}$ es algebraicamente independiente sobre K y $s_1,\dots,s_n$ son los polinomios simétricos elementales en las variables $t_1,t_2,\dots,t_n$.

1 Sean $E=K(t_1,t_2,t_3,t_4)$ y $F=K(s_1,s_2,s_3,s_4)$.

(a) Calcular el grado de la subextensión $F(t_1+t_2)/F$. ¿Es normal?

(b) ¿Qué raíces de $m(t_1+t_2,F)$ están en $F(t_1+t_2)$?

2 Sean $E=K(t_1,t_2,\dots,t_n)$ y $F=K(s_1,s_2,\dots,s_n)$.

(a) Probar que $t_1^{a_1}+t_2^{a_2}+\ldots+t_n^{a_n}$ es un elemento primitivo de la extensión E/F si y sólo si los números naturales a_i son distintos dos a dos.

(b) Probar que E/F tiene una única subextensión de grado 2.

(c) Suponiendo que la característica de K no es 2, hallar un elemento de E que genere la subextensión de grado 2 de E/F.

3 Probar, exhibiendo una torre adecuada, que la extensión $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}, i+\sqrt{3}\right)/\mathbb{Q}$ es radical.

4 (a) Probar que para todo $n\in\mathbb{N}$ el grupo diedral D_n es resoluble.

(b) Probar que todo p-grupo finito es resoluble.

5 Sea $f=X^5-bx-a$ un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[X]$. Sea α una raíz de f y sea $E=\mathbb{Q}(\alpha)$. Sabiendo que $N_{E/\mathbb{Q}}(\alpha+1)=-77$ y $N_{E/\mathbb{Q}}(\alpha-1)=81$, determinar si f es resoluble por radicales.

6 Sean $a_1<a_2<\ldots<a_r$ enteros positivos pares, con $r>1$. Dado $m\in\mathbb{N}$ par, consideramos el polinomio $f=(X^2+m)(X-a_1)\cdots(X-a_r)-2$.

(a) Probar que f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Probar que si m es suficientemente grande, entonces f tiene exactamente dos raíces no reales.

(c) Deducir que para todo primo $p\geq 5$ existe un polinomio $f\in\mathbb{Q}[X]$ de grado p que no es resoluble por radicales.

7 Probar que ninguno de los siguientes polinomios es resoluble por radicales sobre $\mathbb{Q}$:

(a) $X^5-14X+7$ (b) X^5-7X^2+7 (c) $X^7-10X^5+15X+5$

8 Sea $f\in\mathbb{Q}[X]$ un polinomio irreducible de grado 5 tal que $\Delta(f)<0$. Probar que f no es resoluble por radicales.

En lo que sigue, dado un polinomio separable $f\in\mathbb{Z}[X]$ de grado n, llamamos G_f a su grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$, al cual identificamos con un subgrupo de S_n. Además, para cada primo p, llamamos f_p a la imagen de f por el morfismo canónico $\mathbb{Z}[X]\to\mathbb{F}_p[X]$.

9 Para cada uno de los siguientes polinomios f, probar que $G_f = S_n$, siendo n el grado del polinomio:

(a) $X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 5X^2 - 2X + 3$
(b) $X^6 - 12X^4 + 15X^3 - 6X^2 + 15X + 12$
(c) $X^5 + 25X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 10X + 15$

10 Sea f el polinomio $X^5 - X^4 + 2X^2 - 2$. Factorizando f módulo 3 y módulo 7, probar que G_f contiene una trasposición y un 4-ciclo. ¿Es $G_f = S_5$?

11 Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ mónico e irreducible de grado 4 tal que $G_f \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Probar que para todo primo p, el polinomio f_p es reducible en $\mathbb{F}_p[X]$.

12 Sea G un subgrupo de S_n. Definimos una relación $\sim$ en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de la siguiente manera: $a \sim b$ si y sólo si $(ab) \in G$ (entendiendo que $(aa) = \mathrm{id}$).

(a) Probar que $\sim$ es relación de equivalencia.
(b) Probar que si $a \sim b$ y $g \in G$, entonces también $g(a) \sim g(b)$. Luego, queda bien definida una acción de G en el conjunto de clases de equivalencia, dada por $g \cdot [a] := [g(a)]$.
(c) Probar que si G es transitivo, entonces todas las clases de equivalencia de $\sim$ tienen el mismo cardinal.

13 Sea G un subgrupo transitivo de S_n que contiene una trasposición y un p-ciclo, donde $p > \frac{n}{2}$ es un número primo. Probar que $G = S_n$.

Sugerencia. Probar que la relación $\sim$ definida en el ejercicio anterior tiene una única clase de equivalencia.

14 Sea $p > 2$ un número primo y sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio mónico e irreducible de grado $p + 2$. Supongamos que para cierto primo p', el polinomio $f_{p'}$ se factoriza en $\mathbb{F}_{p'}[X]$ como producto de dos polinomios irreducibles cuyos grados son 2 y p. Probar que $G_f = S_{p+2}$.

15 Calcular el grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $X^9 + 3X^8 + 3X^7 - 9X^3 - 9$.

Recordemos que un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es construible (con regla y compás) si y sólo si existe una torre de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n$ con $\alpha \in F_n$ y $[F_i : F_{i-1}] = 2$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

16 Dar un procedimiento para construir un pentágono regular con regla y compás.

17 Sea n un entero positivo. Probar que se puede construir un ángulo de n grados con regla y compás si y sólo si n es divisible por 3.

18 Probar que un ángulo dado θ se puede trisecar con regla y compás si y sólo si el polinomio $4X^3 - 3X - \cos(\theta)$ es reducible sobre $\mathbb{Q}(\cos(\theta))$.

19 Mostrar como se puede trisecar un ángulo dado de $\frac{3\pi}{7}$ usando regla y compás.

20 Decidir si es posible construir con regla y compás un triángulo isósceles no rectángulo cuyos vértices estén sobre la circunferencia unitaria y su área sea 1.