Práctica 6: Extensiones inseparables - Norma y traza

1 Sean K un cuerpo de característica p, $a \in K - K^p$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Probar que el polinomio $X^{p^n} - a$ es irreducible en $K[X]$.

2 Sea E/K una extensión algebraica y sean

$$E_s = \{\alpha \in E \mid \alpha \text{ es separable sobre } K\},$$
$$E_i = \{\alpha \in E \mid \alpha \text{ es puramente inseparable sobre } K\}.$$

(a) Probar que E_s y E_i son subcuerpos de E.

(b) Probar que $E_s \cap E_i = K$.

(c) Probar que si E/K es normal, entonces E/E_i es separable y $E_s E_i = E$.

3 Sean $K = \mathbb{F}_2(u,v)$ con $\{u,v\}$ algebraicamente independiente sobre $\mathbb{F}_2$, $\alpha \in \overline{K}$ una raíz del polinomio $X^2 + X + u$, $\beta \in \overline{K}$ una raíz cuadrada de αv, y $E = K(\beta)$.

(a) Probar que $[E:K] = 4$ y calcular E_s.

(b) Probar que si $\gamma \in E$ es tal que $\gamma^2 \in K$, entonces $\gamma \in K$.

Sugerencia. Notar que $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ es una base de E como K-espacio vectorial. Escribir γ como combinación lineal de estos elementos, elevar al cuadrado y usar que $\alpha \notin K$ para forzar que cierto coeficiente sea 0.

(c) Concluir que $E_i = K$, y entonces no valen las conclusiones de (c) del ejercicio anterior sin la hipótesis de normalidad.

4 Sean $K = \mathbb{F}_p(u,v)$ con $p > 2$ primo y $\{u,v\}$ algebraicamente independiente sobre $\mathbb{F}_p$. Sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz del polinomio $X^{2p} + u^2 v X^p - u$, y sea $E = K(\alpha)$.

(a) Probar que $[E:K] = 2p$.

(b) Probar que la extensión E/K no es separable ni puramente inseparable.

5 Sea $\{u,v\}$ algebraicamente independiente sobre $\mathbb{F}_p$. Calcular el grado y el grado de inseparabilidad de las siguientes extensiones:

i) $\mathbb{F}_p(u,v)/\mathbb{F}_p(u^p - u, v^p - v)$.

ii) $\mathbb{F}_p(u,v)/\mathbb{F}_p(u^p, v^p - v - u)$.

6 (a) Sea E/K una extensión separable, con E perfecto. Probar que K es perfecto.

(b) Sea E/K una extensión finita, con E perfecto. Probar que K es perfecto.

7 Calcular la norma y la traza de $\sqrt[3]{2}$ en $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)/\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, \xi_3\right)/\mathbb{Q}$.

8 Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Calcular la norma y la traza de los elementos ξ_p y $1 - \xi_p$ en la extensión $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$.

9 Sea $f \in K[X]$ un polinomio irreducible y separable de grado n y sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz de f. Probar que para todo $c \in K$, $N_{K(\alpha)/K}(\alpha - c) = (-1)^n f(c)$.

10 Sea K un cuerpo de característica p y sea t trascendente sobre K. Calcular la norma y la traza de t en la extensión $K(t)/K(t^p)$.

11 Sean $p > 3$ primo y $\{u, v\}$ algebraicamente independiente sobre $\mathbb{F}_p$. Sean $K = \mathbb{F}_p\left(u^3, v^2\right)$ y $E = \mathbb{F}_p(u, v)$. Calcular la norma y la traza de $u + v$ en la extensión E/K.

12 Sea K un cuerpo de característica p y sea $[E : K]$ una extensión de grado n, con n no divisible por p. Probar que existe $\alpha \in E$ tal que $E = K(\alpha)$ y el coeficiente de X^{n-1} en $m(\alpha, K)$ es igual a 0.

13 Sea $n > 1$. Probar que el polinomio $X^n - \left(1 + \sqrt[3]{2}\right)$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

14 Sea $S = \left\{ \sqrt[n]{p} \;\middle|\; p \text{ primo}, n \geq 2\right\}$. Probar que para todo $A \subseteq S$ finito y no vacío, la suma de los elementos de A es irracional.

15 Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt[n]{2}\right)$. Probar que las únicas subextensiones de $E/\mathbb{Q}$ son las de la forma $\mathbb{Q}\left(\sqrt[d]{2}\right)/\mathbb{Q}$ con d divisor de n.

Sugerencia. Sea $F/\mathbb{Q}$ una subextensión de grado d. Calcular $N_{E/F}\left(\sqrt[n]{2}\right)$.

16 Sea $f \in K[X]$ un polinomio mónico, irreducible y separable de grado n. Recordemos que el *discriminante* de f se define como

$$\Delta(f) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{K}$ son las raíces de f. Probar que si α es cualquier raíz de f, entonces vale la igualdad

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot N_{K(\alpha)/K}\left(f'(\alpha)\right).$$

17 Sea p un número primo. Probar que la ecuación $a^3 + pb^3 + p^2c^3 - 3pabc = 0$ no tiene soluciones racionales no triviales (es decir, la única solución con a, b, c racionales es $(0, 0, 0)$).