Práctica 3: Morfismos - Extensiones normales

1 Sean $\sigma : E/K \to F/K$ un morfismo de extensiones y $f \in K[X]$ un polinomio.

(a) Probar que para todo $\alpha \in E$ se cumple que $\sigma(f(\alpha)) = f(\sigma(\alpha))$.

(b) Deducir que si α es algebraico sobre K entonces $\sigma(\alpha)$ es raíz de $m(\alpha, K)$.

2 Sea E/K una extensión y sean $\alpha, \beta \in E$ dos raíces de un polinomio irreducible $f \in K[X]$. Probar que existe un único morfismo de extensiones $\sigma : K(\alpha)/K \to K(\beta)/K$ tal que $\sigma(\alpha) = \beta$.

Sugerencia. Usar que $K(\alpha) \cong K[X]/\langle f \rangle$ y las propiedades universales que correspondan.

3 En cada uno de los siguientes casos, calcular el cardinal del conjunto $\mathrm{Hom}(E/K, F/K)$ y describir sus elementos:

(a) $K = \mathbb{Q}, \quad E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}), \quad F = \mathbb{C}$

(b) $K = \mathbb{Q}, \quad E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}), \quad F = \mathbb{R}$

(c) $K = \mathbb{Q}, \quad E = \mathbb{Q}(\xi_n), \quad F = \mathbb{C}$

(d) $K = \mathbb{Q}, \quad E = \mathbb{Q}(\xi_n), \quad F = \mathbb{Q}(\xi_n)$

(e) $K = \mathbb{Q}(i), \quad E = \mathbb{Q}(\xi_8), \quad F = \mathbb{C}$

(f) $K = \mathbb{Q}, \quad E = \mathbb{Q}(\sqrt[12]{3}), \quad F = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$

(g) $K = \mathbb{Q}, \quad E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}), \quad F = \mathbb{Q}(\sqrt[12]{3})$

(h) $K = \mathbb{Q}, \quad E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}), \quad F = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$

(i) $K = \mathbb{Q}, \quad E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i), \quad F = \mathbb{C}$

(j) $K = \mathbb{Q}, \quad E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i), \quad F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$

4 Sea K un cuerpo de característica $p > 0$. Probar que $\sigma : K \to K$ dado por $\sigma(x) = x^p$ es morfismo de cuerpos, y si además K es finito, entonces σ es un automorfismo.

5 Sean K un cuerpo y $f \in K[X]$ un polinomio irreducible. Para $\alpha \in \overline{K}$ raíz de f, denotamos $r(\alpha)$ a la cantidad de raíces de f que pertenecen a $K(\alpha)$. Probar que este número no depende de la raíz elegida, es decir: si β es otra raíz de f, entonces $r(\alpha) = r(\beta)$.

6 Sean $K \subseteq F \subseteq E$ tres cuerpos y sea g un polinomio con coeficientes en K. Probar que si E es un cuerpo de descomposición de g sobre K, entonces también es un cuerpo de descomposición de g sobre F.

7 En cada uno de los siguientes casos, calcular el grado de E/K donde E es un cuerpo de descomposición de f sobre K. (Para eso, seguramente necesiten antes encontrar un sistema de generadores conveniente.)

(a) $K = \mathbb{Q}, \quad f = X^n - 1$

(b) $K = \mathbb{R}, \quad f = X^n - 1$ con $n > 2$

(c) $K = \mathbb{Q}, \quad f = X^4 - 2$

(d) $K = \mathbb{Q}(i), \quad f = X^4 - 3$

(e) $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \quad f = X^3 - 2$

(f) $K = \mathbb{Q}, \quad f = X^5 + X^3 - 2X^2 - 2$

(g) $K = \mathbb{Q}, \quad f = X^3 + 6X + 3$

(h) $K = \mathbb{Q}, \quad f = X^p - 5$ con p primo

(i) $K = \mathbb{Q}, \quad f = X^4 + 2$

(j) $K = \mathbb{Q}, \quad f = X^4 - 10X^2 + 5$

(k) $K = \mathbb{Q}, \quad f = X^6 - 4X^3 + 1$

(l) $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad f = X^3 - X + 1$

(m) $K = \mathbb{C}(t), \quad f = X^n - t$ con t trascendente sobre $\mathbb{C}$

Sugerencia. Algunos de estos polinomios ya aparecieron antes en las guías.

8 Sean E/K y F/K dos extensiones de cuerpos. Probar que si E/K y F/K son normales entonces $E \cap F/K$ también lo es.

9 ¿Cuáles de las extensiones E/K que aparecen en el ejercicio **3** son normales?

10 Sea $E = K(S)$ donde todo elemento $\alpha \in S$ cumple que $m(\alpha, K)$ tiene grado 2. Probar que la extensión E/K es normal.

11 Sean $f \in K[X]$, E un cuerpo de descomposición de f sobre K y F un cuerpo tal que $K \subseteq F \subseteq E$. Probar que todo morfismo $\sigma : F/K \to E/K$ se puede extender a un automorfismo de E/K.

12 Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ se factoriza linealmente en $E[X]$. Probar que E es algebraicamente cerrado.

13 Determinar todos los pares (m, n) de números naturales tales que la extensión $\mathbb{Q}\left(\sqrt[n]{m}\right)/\mathbb{Q}$ es normal.

14 Sean K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K. Probar que la extensión $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si el polinomio $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

15 Sean E/K una extensión normal y $f \in K[X]$ un polinomio irreducible. Probar que todos los factores irreducibles de f en $E[X]$ tienen el mismo grado.

16 Este ejercicio da otra manera de acotar la cantidad de morfismos de una extensión a partir de su grado.

Sean E y F dos cuerpos y sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_n : E \to F$ morfismos distintos.

(*a*) Probar que el conjunto $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ es linealmente independiente sobre F.[1]

Sugerencia. Por el absurdo: tomar un subconjunto LD *minimal*, sin pérdida de generalidad podemos suponer que es $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$. Usando un elemento $z \in E$ tal que $\sigma_1(z) \neq \sigma_2(z)$, conseguir una combinación lineal no trivial de $\{\sigma_2, \ldots, \sigma_r\}$ que valga 0.

(*b*) Deducir que si E/K y F/K son dos extensiones, con E/K finita, entonces

$$\#\mathrm{Hom}(E/K, F/K) \leq [E : K].$$

[1]En realidad, este teorema vale para G cualquier grupo abeliano y los $\sigma_i : G \to F^\times$ morfismos de grupos, a veces llamados **caracteres**. No se usa la estructura aditiva de E.