Práctica 2: Extensiones de cuerpos

1 Sean E/K una extensión de cuerpos, $\alpha \in E$ un elemento algebraico sobre K y F/K una subextensión de E/K.

(a) Probar que α es algebraico sobre F y que $m(\alpha, F) \mid m(\alpha, K)$.

(b) Mostrar ejemplos donde $m(\alpha, F) = m(\alpha, K)$ y donde $m(\alpha, F) \neq m(\alpha, K)$.

2 Sean E/K y F/K dos extensiones finitas, con E y F subcuerpos de un cuerpo L.

(a) Probar que si $[E : K]$ y $[F : K]$ son coprimos entonces $[EF : F] = [E : K]$.

(b) Mostrar con un ejemplo que tener $[EF : F] = [E : K]$ no implica que $[E : K]$ y $[F : K]$ sean coprimos.

(c) Probar que si $[E : K]$ y $[F : K]$ son coprimos entonces $E \cap F = K$. ¿Vale la vuelta?

De aquí en adelante, salvo que se aclare lo contrario, ξ_n siempre denota una raíz n-ésima primitiva de la unidad (en $\mathbb{C}$).

3 (a) Probar que $m(\xi_n, \mathbb{Q}) = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$ si y sólo si n es primo.

(b) Calcular $m(\xi_6, \mathbb{Q})$ y $[\mathbb{Q}(\xi_6) : \mathbb{Q}]$.

4 Sea $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ con la estructura de cuerpo del ejercicio 10 de la Práctica 1.

(a) Calcular el polinomio minimal de cada uno de los elementos de K sobre su cuerpo primo.

(b) Determinar todos los polinomios irreducibles $f \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$ de grado 2, y probar que para cada uno de ellos se tiene que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]/\langle f \rangle \cong K$.

5 Calcular el grado de cada una de las siguientes extensiones de cuerpos:

(a) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[5]{3}\right)/\mathbb{Q}$

(b) $\mathbb{C}/\mathbb{R}$

(c) $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$

(d) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{2}\right)/\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

(e) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[18]{5}\right)/\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{5}\right)$

(f) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{7}}\right)/\mathbb{Q}$

(g) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)/\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

(h) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)/\mathbb{Q}$

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})/\mathbb{Q}$

(j) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\,i\right)/\mathbb{Q}$

(k) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, i\right)/\mathbb{Q}$

(l) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\,i\right)/\mathbb{Q}$

(m) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{3}, i\right)/\mathbb{Q}(i)$

(n) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{7}\right)/\mathbb{Q}$

(o) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[10]{3}, \sqrt[15]{3}\right)/\mathbb{Q}$

6 Sea $f \in K[X]$ un polinomio irreducible de grado d. Sea E/K una extensión cuyo grado es coprimo con d. Probar que f es irreducible sobre E.

7 Consideramos el polinomio $f = X^3 + 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Probar que f tiene exactamente una raíz real.

(b) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una de las raíces no reales de f, y sea $E = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, \alpha)$. Calcular $[E : \mathbb{Q}]$.

(c) Calcular $E \cap \mathbb{R}$.

8 Probar que $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] > \aleph_0$.

9 Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irreducible de grado 3 y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dos raíces de f.

(a) Probar que $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}] = 3$ o 6.

(b) Probar que si $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}] = 3$ entonces todas las raíces de f están en $\mathbb{R}$.

Nota. Más adelante podremos probar que no vale la vuelta en (b).

10 Probar que el polinomio $X^{10}+4$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

Sugerencia. Estamos en la Práctica 2, no en la Práctica 1. Actúen en consecuencia.

11 Sea K un cuerpo **cuya característica no es 2** y sea E/K una extensión de cuerpos. Supongamos que $\alpha, \beta \in E$ son tales que $\alpha^2, \beta^2 \in K$ y $\alpha+\beta \neq 0$. Probar que $K(\alpha,\beta) = K(\alpha+\beta)$.

Sugerencia. Probar primero que $\alpha-\beta \in K(\alpha+\beta)$.

12 Sea E/K una extensión de grado impar y sea $\alpha \in E$. Probar que $K(\alpha) = K\left(\alpha^2\right)$.

13 Sea p un número primo. Hallar **todos** los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el polinomio $X^n - p^2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

14 Sean p un número primo y E/K una extensión de grado p^2. Probar que existen $\alpha, \beta \in E$ tales que $E = K(\alpha,\beta)$.

15 Sea $p > 2$ un número primo. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dos raíces distintas del polinomio $X^p - 2$. Probar que $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$.

16 (a) Sea K un cuerpo cuya característica no es 2 y sea E/K una extensión de grado 2. Probar que existe $\beta \in E$ tal que $E = K(\beta)$ y $\beta^2 \in K$. (En otras palabras, E se obtiene *agregando una raíz cuadrada de un elemento de K*.)
¿En qué paso se usa que K no tiene característica 2?

(b) Sea L/K una extensión de cuerpos y sean $\alpha, \beta \in L$ tales que $\alpha^2, \beta^2 \in K$ pero $\alpha, \beta \notin K$. Probar que $K(\alpha) = K(\beta)$ si y sólo si $\alpha\beta \in K$.

(c) Caracterizar completamente las subextensiones de grado 2 de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. (Esto significa: dar una "lista" de subextensiones de modo que cualquier subextensión de grado 2 de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es igual a exactamente una de las de la lista.)

17 Probar que $m(\xi_5+\xi_5^4,\mathbb{Q}) = X^2+X-1$. Deducir que $\mathbb{Q}(\xi_5)/\mathbb{Q}$ contiene una subextensión de grado 2. ¿Cuál es?

18 Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ primos (positivos) distintos y sea $E = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n})$.

(a) Probar que si $\alpha \in E$ es tal que $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$, entonces existen $q \in \mathbb{Q}$ y $J \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ tales que $\alpha = q \cdot \sqrt{\prod_{j\in J} p_j}$.

(b) Calcular $[E:\mathbb{Q}]$.

19 Calcular el polinomio minimal de $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ sobre $\mathbb{Q}$, sobre $\mathbb{Q}(i)$ y sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$.

Sugerencia. Mirar el ejercicio **11**.

20 Sea E/K una extensión algebraica de grado infinito. Probar que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe alguna subextensión **finita** F/K tal que $[F : K] > n_0$.

21 Sea K un cuerpo y sean f y g dos polinomios en $K[X]$, no constantes. Sea α una raíz de f en una extensión de K. Probar que el polinomio $h(X) = f(g(X))$ es irreducible sobre K si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- f es irreducible sobre K,
- $g - \alpha$ es irreducible sobre $K(\alpha)$.

22 **Convencerse** de que, con las herramientas que venimos usando, no es fácil calcular el grado de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$.
O encontrar una demostración que sirva como contraejemplo.

23 (*a*) Probar que todo cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.

(*b*) Sea E/K una extensión algebraica. Calcular el cardinal de E en función del de K.

(*c*) Deducir que para todo cardinal infinito a existe un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal a.

24 Sea K un cuerpo.

(*a*) Sea t trascendente sobre K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $m(t, K(t^n))$ y $[K(t) : K(t^n)]$.

(*b*) Sean $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ un conjunto algebraicamente independiente sobre K y $e_1, e_2, \dots, e_n$ números naturales. Calcular $\left[K(t_1, t_2, \dots, t_n) : K\left(t_1^{e_1}, t_2^{e_2}, \dots, t_n^{e_n}\right)\right]$.

25 Sean K un cuerpo y $f \in K[X]$ no constante. Probar que $[K(X) : K(f)] = \mathrm{gr}(f)$.

26 Sea E/K una extensión de cuerpos y sean $x, y \in E$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(*a*) Si x^2 es trascendente sobre K entonces x también lo es.

(*b*) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $x + y$ o xy es trascendente sobre K.

(*c*) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x + y$ es trascendente sobre K.

(*d*) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces xy es trascendente sobre K.

(*e*) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

(*f*) Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$ entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K.