Topología

Segundo cuatrimestre - 2022

Práctica 9

Homología

---

1. Probar que si A es un retracto de un espacio X, entonces $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es una sección para todo $n \geq 0$ y se tiene un isomorfismo $H_n(X) \simeq H_n(A) \oplus H_n(X,A)$.

2. Sea $A \subset X$. Probar que $H_0(X,A) = 0$ si y sólo si A interseca todas las componentes arco conexas de X.

3. Probar que si A es un retracto por deformación débil de un espacio X entonces $H_n(X,A) = 0$ para todo $n \geq 0$.

4.
   a) Sea $\{X_i\}$ una familia finita de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que (X_i, x_i) es un par bueno. Si $X = \bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios, identificando todos los puntos bases x_i, probar que $\widetilde{H}_n(X) = \bigoplus_i \widetilde{H}_n(X_i)$.

   b) Calcular $\widetilde{H}_n\left(\bigvee_{i\in I} S^k\right)$.

5. Sea X un espacio topológico y
$$\Sigma X = \frac{X \times [-1,1]}{(x,1) \sim (y,1),\ (x,-1) \sim (y,-1)}.$$
su *suspensión*. Probar que hay un isomorfismo $\widetilde{H}_{n+1}(\Sigma X) \simeq \widetilde{H}_n(X)$.

6. Calcule los grupos de homología de S^n para cada $n \in \mathbb{N}$. Deduzca que $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^m$ sólo si $m = n$.

7. Calcule los grupos de homología de $S^n / e_{n+1} \sim -e_{n+1}$.

8. Sean $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_k, \in \mathbb{R}^n$ puntos distintos. Calcule los grupos de homología de $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$.