Topología

Segundo cuatrimestre - 2022

Práctica 8

Teorema de van Kampen

---

1. Sea $X = U \cup V$ un espacio topológico con U, V abiertos arcoconexos tales que $U \cap V$ es no vacío y arcoconexo, y sea $\psi : U \to X$ la inclusión.

   a) Probar que si V es simplemente conexo, entonces $\psi_* : \pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ es un epimorfismo.

   b) Probar que si V y $U \cap V$ son simplemente conexos, entonces $\psi_* : \pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ es un isomorfismo.

2. Sea x un punto de $\mathbb{R}^2$ y sea $X_n \subset \mathbb{R}^2$ la unión de n circunferencias $C_1, ..., C_n$ tales que $C_i \cap C_j = \{x\}$ para todo i, j. Probar que $\pi_1(X_n, x)$ es el grupo libre con n generadores.

3. Probar que la esfera n-dimensional S^n es simplemente conexa para $n \geq 2$. Concluir que el grupo fundamental del espacio proyectivo $\mathscr{P}^n(\mathbb{R})$ es el grupo cíclico de orden 2 para $n \geq 2$.

4. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$. Dados $p_0, p_1, \ldots, p_k \in S^n$ puntos distintos, calcular $\pi_1(S^n \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}, p_0)$.

5. Calcular los grupos fundamentales de los siguientes espacios.

   a) $T \setminus \{y\}$, el toro sin un punto.

   b) $P^2(\mathbb{R}) \setminus \{y\}$, el plano proyectivo sin un punto.

   c) $S^n \vee S^n$, la unión por un punto de dos copias de S^n.

   d) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

   e) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$.

   f) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$.

   g) $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

6. Sea $K = I \times I / \sim$ donde $(x, y) \sim (x', y')$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

   $$(x = x' \text{ e } y = y') \text{ ó } (\{y, y'\} = \{0, 1\} \text{ y } x = x') \text{ ó } (\{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ y } y + y' = 1)$$

   El espacio K es la *botella de Klein*. Dar una presentación del grupo fundamental de K.

7. Sean X e Y dos espacios arcoconexos y $p \in X$, $q \in Y$. Pruebe que si existen un abierto $U \subset X$ que se retrae por deformación fuerte a $\{p\}$ y un abierto $V \subset Y$ que se retrae por deformación fuerte a $\{q\}$, entonces el grupo fundamental del *wedge*

   $$X \vee Y := \frac{X \sqcup Y}{p \sim q}$$

   es isomorfo a $\pi_1(X, p) * \pi_1(Y, q)$.