

Topología
Segundo cuatrimestre - 2022
Práctica 7
Revestimientos

1. Probar que si X es un espacio e Y es discreto, entonces la proyección $p_X : X \times Y \rightarrow X$ es un revestimiento.
2. Probar que si $p : E \rightarrow B$ es un revestimiento, la fibra $E_b = p^{-1}(b)$ es un subespacio discreto de E para todo $b \in B$. Probar además que si B es conexo, todas las fibras tienen el mismo cardinal.
3. Probar que las siguientes funciones son revestimientos:
 - a) $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(x) = (\cos(2\pi x), \text{sen}(2\pi x))$.
 - b) $f : S^1 \rightarrow S^1, f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ fijo.
 - c) $p : S^n \rightarrow P^n$ la proyección al plano proyectivo.
 - d) G grupo topológico, H subgrupo discreto de G y $p : G \rightarrow G/H$ la proyección al cociente.
 - e) $p : E \rightarrow B, p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z} \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1 : z = 1 \text{ ó } w = 1\}$.
4. Probar que $p : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow S^1$ definida por $p(x) = (\cos(2\pi x), \text{sen}(2\pi x))$ es un homeomorfismo local pero no es un revestimiento.
5. Probar que si $p : E \rightarrow B$ es un revestimiento, entonces p es abierta y por lo tanto es cociente.
6. Probar que si $p : E \rightarrow B$ y $p' : E' \rightarrow B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$ también lo es. Usar este resultado para calcular el grupo fundamental del toro.
7. Sean $p : X \rightarrow Y$ y $q : Y \rightarrow Z$ revestimientos. Probar que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $qp : X \rightarrow Z$ es un revestimiento.
8. Probar que si $p : E \rightarrow B$ es revestimiento y $A \subset B$, entonces $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow A$ es revestimiento.
9. Sea B un espacio conexo y localmente conexo, y sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento. Probar que si C es una componente conexa de E , entonces $p|_C : C \rightarrow B$ es un revestimiento.
10. Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ el revestimiento dado por $p(x) := e^{i2\pi x} = (\cos(2\pi x), \text{sen}(2\pi x))$ y sea X un espacio arco-conexo y localmente arco-conexo. Probar que una función continua $f : X \rightarrow S^1$ puede levantarse a una función continua $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p\tilde{f} = f$ si y sólo si f es homotópica a una constante.
11. Sea G un grupo y X un G -espacio. Decimos que la acción es *libre* si $gx \neq x$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G \setminus \{1\}$. Decimos que la acción es *propriadamente discontinua* si para todo $x \in X$ existe un abierto $U \ni x$ tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G \setminus \{1\}$.
 - a) Probar que si G es finito, X es Hausdorff y la acción es libre, entonces es propriadamente discontinua.
 - b) Probar que si G actúa en X y la acción es propriadamente discontinua, entonces la proyección $p : X \rightarrow X/G$ es un revestimiento.

- c) Sea $X = \mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Sea $G \subset \text{Aut}(X)$ el subgrupo generado por ϕ , donde $\phi(z) = \bar{z} + 1 + i$. Probar que la acción de G en X es propiamente discontinua, y que X/G es homeomorfo a la banda de Möbius.
- d) Calcular el grupo fundamental de la banda de Möbius.
12. a) Probar que toda función continua $P^2(\mathbb{R}) \rightarrow S^1$ es null-homotópica.
- b) Exhibir una función $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ que no sea null-homotópica.