

**Topología**  
Segundo cuatrimestre - 2022  
Práctica 6  
**Homotopía y grupo fundamental**

---

1. Probar que si  $h, h' : X \rightarrow Y$  son homotópicas y  $k, k' : Y \rightarrow Z$  son homotópicas, entonces  $kh, k'h' : X \rightarrow Z$  son homotópicas.
2. a) Probar que si  $X \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto convexo, entonces  $X$  es contráctil. Concluir que  $I$  y  $\mathbb{R}$  son contráctiles.  
b) Probar que si  $X$  es contráctil, entonces  $X$  es arcoconexo.
3. Sea  $[X, Y]$  el conjunto de clases de homotopía de funciones continuas de  $X$  a  $Y$ .  
a) Probar que si  $Y$  es contráctil entonces  $[X, Y]$  tiene sólo un elemento.  
b) Probar que  $[\ast, Y] = \pi_0(Y)$  para todo espacio  $Y$ .  
c) Probar que si  $X$  es contráctil e  $Y$  es arcoconexo, entonces  $[X, Y]$  tiene sólo un elemento.
4. Probar que un retracto de un espacio contráctil es contráctil.
5. Sea  $G$  un grupo topológico y sea  $X$  un espacio. Probar que  $[X, G]$  es un grupo con la operación  $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$ , donde  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ .
6. Sean  $f : X \rightarrow Y$  continua y  $Z$  otro espacio topológico. Definimos

$$f^* : [Y, Z] \rightarrow [X, Z], \quad f^*([g]) = [gf],$$

$$f_* : [Z, X] \rightarrow [Z, Y], \quad f_*([h]) = [fh].$$

- a) Probar que  $f^*$  y  $f_*$  están bien definidas.
  - b) Probar que si  $f \sim g$  entonces  $f^* = g^*$  y  $f_* = g_*$ .
  - c) Deducir que si  $f$  es equivalencia homotópica entonces  $f^*$  y  $f_*$  son biyecciones.
7. Probar que una equivalencia homotópica induce una biyección en los  $\pi_0$ . Deducir que si dos espacios  $X$  e  $Y$  tienen el mismo tipo homotópico, entonces uno es arcoconexo si y sólo si el otro lo es. Probar también que  $X$  es conexo si y sólo si  $Y$  es conexo.
  8. Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  tal que  $f \simeq g$ . Probar que  $f$  es equivalencia homotópica si y solo si  $g$  lo es.
  9. a) Hallar  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f$  tenga inversa homotópica a izquierda pero no a derecha..  
b) Probar que si  $f : X \rightarrow Y$  tiene inversa homotópica a izquierda y a derecha entonces es una equivalencia homotópica.
  10. Probar que  $f : X \rightarrow Y$  es equivalencia homotópica si y sólo si existen  $g, h : Y \rightarrow X$  tales que  $fg$  y  $hf$  son equivalencias homotópicas.
  11. Sea

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x = 0 \text{ ó } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(x, y) : y = 0, 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

el *peine del topólogo* y sea  $x_0 := (0, 1) \in X$ . Probar que  $X$  es contráctil pero no existe una homotopía entre  $1_X$  y  $c_{x_0}$  que sea relativa a  $x_0$  (es decir que toda homotopía entre la identidad y la función constante  $x_0$  va moviendo al punto durante la deformación).

12. Sea  $C$  un subespacio convexo de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $x_0$  un punto de  $C$ . Probar que  $\{x_0\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $C$ .

13. Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0 \in X$ . Sea

$$\Omega X = \{\omega : I \rightarrow X, \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$$

con la topología del subespacio de la topología compacto abierta. Probar que

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega X).$$

14. Sea  $X$  un espacio topológico,  $x_0 \in X$  y sea  $s \in S^1$  un punto cualquiera. Sea

$$[(S^1, s), (X, x_0)] = \{[f] / f : S^1 \rightarrow X \text{ continua tal que } f(s) = x_0\}$$

donde  $[f] = [g]$  si  $f \simeq g$  rel  $\{s\}$ . Probar que  $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, s), (X, x_0)]$ .

15. Sean  $x_0, x_1 \in X$  dos puntos en un espacio arcoconexo  $X$ . Probar que  $\pi_1(X, x_0)$  es abeliano si y sólo si para todo par de caminos  $x_0 \xrightarrow{\omega, \omega'} x_1$  se tiene  $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$ .

16. Sea  $A \subset X$  y sea  $r : X \rightarrow A$  una retracción. Dado  $a \in A$ , probar que

$$r_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a)$$

es suryectivo.

17. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un subespacio, y sea  $f : A \rightarrow X$  una función continua. Probar que si  $f$  se extiende a una función  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ , entonces para todo  $a \in A$  el morfismo  $f_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, f(a))$  es el morfismo cero.

18. Sea  $G$  un grupo topológico con multiplicación  $\cdot$  y elemento neutro  $x_0$ . Dados  $f, g \in \Omega(G, x_0)$ , definamos el lazo  $f \odot g$  por  $(f \odot g)(s) = f(s) \cdot g(s)$ .

a) Mostrar que  $\Omega(G, x_0)$  es un grupo con la operación con  $\odot$ .

b) Mostrar que  $\odot$  induce una nueva operación de grupo en  $\pi_1(G, x_0)$ , que por abuso notaremos  $\odot$ .

c) Probar que  $\odot$  coincide con  $\cdot$  en  $\pi_1(G, x_0)$ .

d) Deducir que  $\pi_1(G, x_0)$  es abeliano.