

Topología
Segundo cuatrimestre - 2022
Práctica 6
Homotopía y grupo fundamental

1. Probar que si $h, h' : X \rightarrow Y$ son homotópicas y $k, k' : Y \rightarrow Z$ son homotópicas, entonces $kh, k'h' : X \rightarrow Z$ son homotópicas.
2. a) Probar que si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces X es contráctil. Concluir que I y \mathbb{R} son contráctiles.
b) Probar que si X es contráctil, entonces X es arcoconexo.
3. Sea $[X, Y]$ el conjunto de clases de homotopía de funciones continuas de X a Y .
a) Probar que si Y es contráctil entonces $[X, Y]$ tiene sólo un elemento.
b) Probar que $[*, Y] = \pi_0(Y)$ para todo espacio Y .
c) Probar que si X es contráctil e Y es arcoconexo, entonces $[X, Y]$ tiene sólo un elemento.
4. Probar que un retracto de un espacio contráctil es contráctil.
5. Sea G un grupo topológico y sea X un espacio. Probar que $[X, G]$ es un grupo con la operación $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$, donde $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
6. Sean $f : X \rightarrow Y$ continua y Z otro espacio topológico. Definimos

$$f^* : [Y, Z] \rightarrow [X, Z], \quad f^*([g]) = [gf],$$

$$f_* : [Z, X] \rightarrow [Z, Y], \quad f_*([h]) = [fh].$$

- a) Probar que f^* y f_* están bien definidas.
 - b) Probar que si $f \sim g$ entonces $f^* = g^*$ y $f_* = g_*$.
 - c) Deducir que si f es equivalencia homotópica entonces f^* y f_* son biyecciones.
7. Probar que una equivalencia homotópica induce una biyección en los π_0 . Deducir que si dos espacios X e Y tienen el mismo tipo homotópico, entonces uno es arcoconexo si y sólo si el otro lo es. Probar también que X es conexo si y sólo si Y es conexo.
 8. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ tal que $f \simeq g$. Probar que f es equivalencia homotópica si y solo si g lo es.
 9. a) Hallar $f : X \rightarrow Y$ tal que f tenga inversa homotópica a izquierda pero no a derecha..
b) Probar que si $f : X \rightarrow Y$ tiene inversa homotópica a izquierda y a derecha entonces es una equivalencia homotópica.
 10. Probar que $f : X \rightarrow Y$ es equivalencia homotópica si y sólo si existen $g, h : Y \rightarrow X$ tales que fg y hf son equivalencias homotópicas.
 11. Sea

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x = 0 \text{ ó } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(x, y) : y = 0, 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

el *peine del topólogo* y sea $x_0 := (0, 1) \in X$. Probar que X es contráctil pero no existe una homotopía entre 1_X y c_{x_0} que sea relativa a x_0 (es decir que toda homotopía entre la identidad y la función constante x_0 va moviendo al punto durante la deformación).

12. Sea C un subespacio convexo de \mathbb{R}^n y sea x_0 un punto de C . Probar que $\{x_0\}$ es un retracto por deformación fuerte de C .

13. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea

$$\Omega X = \{\omega : I \rightarrow X, \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$$

con la topología del subespacio de la topología compacto abierta. Probar que

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega X).$$

14. Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$ y sea $s \in S^1$ un punto cualquiera. Sea

$$[(S^1, s), (X, x_0)] = \{[f] / f : S^1 \rightarrow X \text{ continua tal que } f(s) = x_0\}$$

donde $[f] = [g]$ si $f \simeq g$ rel $\{s\}$. Probar que $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, s), (X, x_0)]$.

15. Sean $x_0, x_1 \in X$ dos puntos en un espacio arcoconexo X . Probar que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos $x_0 \xrightarrow{\omega, \omega'} x_1$ se tiene $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$.

16. Sea $A \subset X$ y sea $r : X \rightarrow A$ una retracción. Dado $a \in A$, probar que

$$r_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a)$$

es suryectivo.

17. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio, y sea $f : A \rightarrow X$ una función continua. Probar que si f se extiende a una función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow X$, entonces para todo $a \in A$ el morfismo $f_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, f(a))$ es el morfismo cero.

18. Sea G un grupo topológico con multiplicación \cdot y elemento neutro x_0 . Dados $f, g \in \Omega(G, x_0)$, definamos el lazo $f \odot g$ por $(f \odot g)(s) = f(s) \cdot g(s)$.

a) Mostrar que $\Omega(G, x_0)$ es un grupo con la operación con \odot .

b) Mostrar que \odot induce una nueva operación de grupo en $\pi_1(G, x_0)$, que por abuso notaremos \odot .

c) Probar que \odot coincide con \cdot en $\pi_1(G, x_0)$.

d) Deducir que $\pi_1(G, x_0)$ es abeliano.