Topología

Segundo cuatrimestre - 2021

Práctica 4

Compacidad y axiomas de separación

Compacidad

1. Sean τ, τ' dos topologías en X.

   a) Pruebe que si τ' es más fina que τ y (X, τ') es compacto, entonces (X, τ) es compacto.

   b) Pruebe que si (X, τ) y (X, τ') son compactos y Hausdorff, entonces o bien $\tau = \tau'$ o bien τ y τ' no son comparables.

2. Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff y sea $\tau_c = \{U \in \tau : X \setminus U \text{ es compacto}\} \cup \{\emptyset\}$. Pruebe que τ_c es una topología sobre X.

3. Pruebe que si X tiene la topología del complemento finito, entonces X es compacto.

4. Decida si $[0, 1]$ es compacto para

   a) la topología $\{U \subseteq [0, 1] : [0, 1] \setminus U \text{ es a lo sumo numerable}\} \cup \{\emptyset\}$;

   b) la topología de subespacio de $\mathbb{R}_l$.

5. Pruebe que S_Ω no es compacto pero es secuencialmente compacto.

6. Sean X e Y espacios topológicos, con X compacto e Y Hausdorff. Muestre que si una función $f : X \to Y$ es continua, entonces es cerrada.

7. Sean X e Y espacios topológicos, con Y compacto y Hausdorff. Puebe que una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo su gráfico $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.

Compacidad local

8. Pruebe que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

9. Pruebe que $[0, 1]^\omega$ no es localmente compacto con la topología uniforme.

10. Pruebe que si $\prod_{i \in I} X_i$ es localmente compacto y $X_i \neq \emptyset$ para todo i, entonces cada X_i es localmente compacto y todos los X_i, salvo una cantidad finita, son compactos.

11. Pruebe que si X es localmente compacto y $f : X \to Y$ es continua y abierta, entonces $f(X)$ es localmente compacto. Halle un ejemplo que muestre que la hipótesis f abierta es necesaria.

Compactificación de Alexandroff

12. Pruebe que la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología subespacio de $\mathbb{R}$.

13. Usando la proyección estereográfica $p : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n),$$

pruebe que la compactificación a un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a S^n.

14. Pruebe que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces f se extiende a un homeomorfismo entre sus compactificaciones a un punto.

Axiomas de separación

15. Pruebe que si X es regular, entonces dos puntos distintos cualesquiera de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.

16. Pruebe que si X es normal, entonces dos cerrados disjuntos cualesquiera de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.

17. Pruebe que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

18. Pruebe que si X es un conjunto ordenado con la topología del orden, entonces X es regular.

19. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Pruebe que si $\prod X_\alpha$ es Hausdorff o regular o normal, entonces también lo es cada X_α.

20. Sea X un conjunto y sean τ, τ' topologías en X tales que $\tau \subseteq \tau'$. Suponiendo que X es Hausdorff (o regular o normal) con una de estas topologías, ¿qué puede deducirse de X con la otra topología?

21. Sean Y un espacio topológico Hausdorff y $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas. Pruebe que $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

22. Pruebe que si X es normal y conexo, entonces X tiene un solo punto o es no numerable.

23. Sea Z un espacio topológico. Si Y es un subespacio de Z, decimos que Y es *retracto* de Z si existe una función continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.

    a) Pruebe que si Z es Hausdorff e Y es un retracto de Z, entonces Y es cerrado en Z.
    b) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ con dos elementos. Pruebe que A no es un retracto de $\mathbb{R}^2$.
    c) Pruebe que S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

24. Pruebe que si $\{f_\alpha : X \to \mathbb{R}\}$ es una familia de funciones continuas que separan puntos de cerrados, entonces es inicial.

25. Pruebe que si Y es normal con base $\mathscr{B}$, entonces Y es subespacio de $[0,1]^J$ con $J \subseteq \mathscr{B} \times \mathscr{B}$.

26. Pruebe que $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ no es normal, pero es completamente regular.

27. Sea X completamente regular. Sean A, B cerrados disjuntos de X. Pruebe que si A es compacto, entonces existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

28. Pruebe que si X es compacto y Hausdorff, entonces es normal.

29. Pruebe que si X es localmente compacto y Hausdorff, entonces es completamente regular.

Compactificación de Stone-Čech

30. Sea Y una compactificación T_2 de X, y sea $\beta(X)$ la compactificación de Stone-Čech. Pruebe que existe una función cerrada y suryectiva $g : \beta(X) \to Y$ que se restringe a la identidad de X.

31. *a*) Pruebe que si $f : S_\Omega \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es eventualmente constante.
    Sugerencia: pruebe en primer lugar que, para cada $\epsilon > 0$, existe un elemento α de S_Ω tal que $|f(\beta) - f(\alpha)| < \epsilon$ para todo $\beta > \alpha$. Sea entonces $\epsilon = 1/n$ para $n \in \mathbb{N}$ y considere los correspondientes puntos α_n.

    b) Pruebe que la compactificación en un punto de S_Ω y la compactificación de Stone-Čech son equivalentes.

    c) Concluya que toda compactificación de S_Ω es equivalente a la compactificación en un punto.

32. Sea X completamente regular. Pruebe que X es conexo si y sólo si $\beta(X)$ es conexo.

33. Sea X discreto.

    a) Pruebe que si $A \subseteq X \subseteq \beta(X)$, entonces $\overline{A}$ y $\overline{X \setminus A}$ son disjuntos, donde las clausuras se toman en $\beta(X)$.

    b) Pruebe que si U es abierto en $\beta(X)$, entonces $\overline{U}$ es abierto en $\beta(X)$.

    c) Pruebe que $\beta(X)$ es totalmente disconexa.