Topología

Segundo cuatrimestre - 2022
Práctica 3
Topologías iniciales y finales

Subespacios

1. Sean X un espacio topológico y A un subespacio de X. Pruebe que si $Z \subseteq A$, entonces la topología de Z como subespacio de A coincide con la topología de Z como subespacio de X.

2. Sea X un conjunto ordenado con la topología del orden y sea $Y \subseteq X$ un subconjunto.

   a) Muestre que la topología del orden de Y no necesariamente concide con la topología de Y como subespacio de X.

   b) Y se dice *convexo* si para cada $a, b \in Y$ se tiene que $(a, b) \subseteq Y$. Pruebe que si Y es convexo, entonces estas dos topologías sí coinciden.

3. Considere a $I = [-1, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos en I? ¿Cuáles son abiertos en $\mathbb{R}$?

   $A = \{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\}$ $\quad B = \{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$ $\quad C = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\}$

   $D = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$ $\quad E = \{x : 0 < |x| < 1, 1/x \notin \mathbb{N}\}$ $\quad F = \{x : |x| \leq 1\}$

Productos

4. Sean X e Y espacios topológicos. Sean A un subespacio de X y B un subespacio de Y. Pruebe que la topología producto en $A \times B$ coincide con la topología de subespacio de $X \times Y$.

5. Sean X e Y dos espacios topológicos.

   a) Pruebe que si X e Y son conexos, entonces $X \times Y$ es conexo.

   b) Pruebe que si X e Y son arco-conexos, entonces $X \times Y$ es arco-conexo.

6. Sean X e Y espacios topológicos. Pruebe que las proyecciones $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ son abiertas. Halle ejemplos en los que no sean cerradas.

7. Sean X, Y y Z espacios topológicos. Una función $f : X \times Y \to Z$ se dice *continua en* x si $f(-, y) : X \to Z$ es continua para todo $y \in Y$. Analogamente, f se dice *continua en* y si $f(x, -) : Y \to Z$ es continua para todo $x \in X$.

   a) Pruebe que si f es continua, entonces es continua en cada variable.

   b) Dé un ejemplo en el que f sea continua en cada variable y sin embargo no sea continua.

8. *a*) Pruebe que la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_d$ es el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de la topología discreta. Compare con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

   b) Sea $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Compare las siguientes topologías sobre $I \times I$:

- la topología producto;
- la topología del orden para el orden lexicográfico;
- la topología producto $I_d \times I$, donde I_d denota a I con la topología discreta.

9. Sea $\mathbb{R}_l$ el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $\mathbb{R}$ y cuya topología tiene como base de abiertos al conjunto $\{[a,b),\ a,b \in \mathbb{R}\}$. Sea L una recta en el plano. Describa la topología de L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

10. *a*) Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Pruebe que las funciones $f : X \to X \times Y$ y $g : Y \to X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son subespacios.

    b) Sea X un espacio métrico con métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Pruebe que la topología inducida por la métrica es la menos fina que hace que d sea una función continua.

    Sugerencia: si d es continua, también lo es $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$, $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$.

11. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subconjunto $A_i \subseteq X_i$. Pruebe que las siguientes afirmaciones sobre $X = \prod_{i \in I} X_i$ son ciertas al dotarlo de tanto la topología producto como la topología caja:

    a) $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$;

    b) si cada A_i es cerrado en X_i, entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es cerrado en X.

12. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ el espacio producto con proyecciones $\{p_i : X \to X_i\}_{i \in I}$. Dada $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en X, pruebe que $x_\alpha \to x$ si y sólo si $p_i(x_\alpha) \to p_i(x)$ para todo $i \in I$. ¿Es cierto esto si se toma en X la topología caja?

13. Sea $\mathbb{R}^\omega = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ el conjunto de sucesiones de números reales.

    i) Decida si la función $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, 2t, 3t, \ldots) \in \mathbb{R}^\omega$ es continua al equipar a $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto. ¿Y con la topología caja?

    ii) Decida si la la sucesión

    $$(1,1,1,1,\ldots), \quad (0,2,2,2,\ldots), \quad (0,0,3,3,\ldots), \quad \ldots$$

    converge en $\mathbb{R}^\omega$ equipado con la topología caja. ¿Y con la topología producto?

    iii) Calcule la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero en $\mathbb{R}^\omega$ con respecto a las topologías producto y caja.

Cocientes

14. *a*) Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Pruebe que si existe $g : Y \to X$ continua tal que $f \circ g = id_Y$, entonces f es un cociente.

    b) Si $A \subseteq X$, una *retracción* de X sobre A es una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Pruebe que una retracción es una aplicación cociente.

15. Sea $p : X \to Y$ una función cociente. Pruebe que si Y es conexo y además $p^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$, entonces X es conexo.

16. Sea $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada. Muestre que:

    a) si $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$, entonces $p_1|_X : X \to \mathbb{R}$ es un cociente cerrado pero no abierto;

b) si $Y = (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$, entonces $p_1|_Y : Y \to \mathbb{R}$ es un cociente que no es ni abierto ni cerrado.

17. Sea Z el subespacio $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Z$ por la fórmula

$$g(x, y) = \begin{cases} (x, 0) & x \neq 0 \\ (0, y) & x = 0 \end{cases}$$

a) ¿Es g un cociente? ¿Es g continua?

b) Halle una base para la topología cociente en Z inducida por g.

18. Sea G un grupo. Un *G-espacio* es un espacio topológico X junto con una acción $\cdot : G \times X \to X$ tal que $x \mapsto g \cdot x$ es continua para todo $g \in G$. Pruebe que los siguientes espacios topológicos son G-espacios.

a) $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $n \cdot x = n + x$.

b) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y la acción es $(n, m) \cdot (x, y) = (n + x, m + y)$.

c) $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ y la acción es $\pm 1 \cdot x = \pm x$.

d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$.

19. Si X es un G-espacio, definimos una relación de equivalencia $\sim_G$ en X como sigue:

$$x \sim_G y \iff \exists\, g \in X \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

Notamos X/G al espacio cociente $X/{\sim_G}$ y $p : X \to X/G$ a la proyección. Pruebe que p es abierta; y que si G es finito, entonces p también es cerrada.

20. *a*) Pruebe que el espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ejercicio 18, *a*)) es homeomorfo a S^1.

b) Pruebe que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ejercicio 18, *b*)) es homeomorfo al toro $S^1 \times S^1$.

c) El *plano proyectivo real* $\mathscr{P}^2(\mathbb{R})$ se define como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ por la relación que identifica $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$ para todo $y \in [0, 1]$ y a $(x, 0)$ con $(1 - x, 1)$ para todo $x \in [0, 1]$. Pruebe que el espacio cociente $S^2/\mathbb{Z}_2$ (ejercicio 18, *c*)) es homeomeorfo a $\mathscr{P}^2(\mathbb{R})$.

d) La *banda de Möbius M* se define como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ por la relación que identifica $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$ para todo $y \in [0, 1]$. Pruebe que el espacio cociente $X/\mathbb{Z}$ (ejercicio 18, *d*)) es homeomorfo a M.

Familias iniciales y finales

21. Pruebe que si $f : X \to Y$ es inyectiva y final, entonces es subespacio.

22. Pruebe que si $f : X \to Y$ es suryectiva e inicial, entonces es cociente.

23. Sea X un espacio topológico con topología τ, y sea $\mathfrak{S} = \{0, 1\}$ el *espacio de Sierpinski*, con topología $\{\emptyset, \{1\}, \mathfrak{S}\}$.

a) Pruebe que $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si $\chi_U : X \to \mathfrak{S}$ es continua, donde χ_U es la función característica de U.

b) Pruebe que la familia $\{\chi_U : X \to \mathfrak{S}\}_{U \in \tau}$ es inicial.

24. Sea $\{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ una familia inicial de funciones, y sea $e : X \to \prod X_i$ la *función evaluación*, definida por

$$e(x) = (f_i(x))_{i\in I}$$

Pruebe que $e : X \to \mathrm{Im}(e)$ es abierta.

25. Decimos que $\{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ *separa puntos* de X si para todo $x \neq y \in X$, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Pruebe que $\{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ es una familia inicial para la topología de X y separa puntos de X si y sólo si la función evaluación $e : X \to \prod_{i\in I} X_i$ es subespacio, donde $\prod_{i\in I} X_i$ tiene la topología producto.

26. Sea $X = \coprod_{i\in I} X_i$, dotado de la topología coproducto. Dada una familia de funciones $\{f_i : X_i \to Y\}_{i\in I}$, existe una única $f : X \to Y$ tal que $f \circ \iota_i = f_i$ para todo $i \in I$, donde $\iota_i : X_i \to X$ es la función inclusión. Pruebe que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia final si y sólo si f es final.