Topología

Segundo cuatrimestre - 2022

Práctica 2

Conexión y arco-conexión

Conexión

1. Sean X un conjunto y τ, τ' dos topologías sobre X. Pruebe que si (X, τ) es un espacio topológico conexo y $\tau' \subseteq \tau$, entonces (X, τ') es un espacio topológico conexo.

2. Sea X un espacio topológico y $\{0, 1\}$ el espacio discreto de dos puntos. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) el espacio X es conexo;

   b) toda función continua $X \to \{0, 1\}$ es constante.

3. Pruebe que un espacio topológico X es disconexo si y sólo si existe un subconjunto propio y no vacío $\emptyset \subsetneq B \subsetneq X$ tal que $\partial B = \emptyset$.

4. *a*) Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X tales que $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Pruebe que $A \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es conexo.

   b) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es conexo.

5. ¿Cuáles de los siguientes espacios dotados de sus topologías del orden lexicográfico son conexos?

   a) $\mathbb{N} \times [0, 1)$.

   b) $[0, 1) \times \mathbb{N}$.

   c) $[0, 1) \times [0, 1]$.

   d) $[0, 1] \times [0, 1)$.

6. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. Pruebe que si A es conexo, entonces todo subespacio B de X tal que $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ resulta conexo. ¿Qué ocurre con ∂A y con A°?

7. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio conexo. Pruebe que si $B \subseteq X$ es tal que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$, entonces $A \cap \partial B \neq \emptyset$.

8. Muestre que entre los espacios $(0, 1), (0, 1]$ y $[0, 1]$ no hay dos homeomorfos.

9. Mostrar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos si $n > 1$.

10. *a*) Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que existe un punto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

    b) Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Pruebe que existe un punto fijo de f.

11. *a*) Muestre que si $A \subset \mathbb{R}^2$ es finito, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es conexo.

    b) Muestre que si $B \subset S^2$ es finito, entonces $S^2 \setminus B$ es conexo.

12. Un espacio topológico X se dice *localmente conexo* si para cada punto $x \in X$ y entorno $V \ni x$ existe un abierto conexo U tal que $x \in U \subset V$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) X es localmente conexo.

b) Las componentes de todo subespacio abierto de X son abiertas en X.

c) Los abiertos conexos de X forman una base de la topología de X.

Concluya que si X es localmente conexo, entonces las componentes conexas de X son abiertas.

13. Una función $f : X \to Y$ se dice *localmente constante* si para todo $x \in X$, existe U entorno abierto de x tal que $f|_U$ es constante. Pruebe que si f es localmente constante y X es conexo, entonces f es constante.

Arco-conexión

14. Sean $C = \{(t, \sin(1/t)) : 0 < t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ y $X = \overline{C} = C \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ el *seno del topólogo*, ambos equipados con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$.

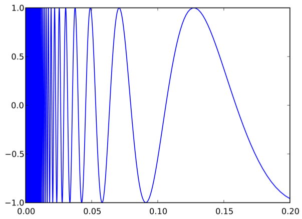

Figura 1: El espacio X.

a) Muestre que C es arco-conexo y deduzca que X es conexo.

b) Muestre que sin embargo X no es arco-conexo. Para verlo, puede suponer que existe un arco continuo $\gamma : [0, 1] \to X$ tal que $\gamma(0) = (0, 0)$ y $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$ y obtener una contradicción del siguiente modo:

   i) Recuerde que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $x, y : [0, 1] \to X$ dos funciones continuas.

   ii) Pruebe que existe $t_1 \in (0, 1)$ tal que $x(t) = \frac{2}{3\pi}$ e, inductivamente, construya una sucesión decreciente $(t_n)_{n\geq 1} \subset [0, 1]$ tal que $x(t_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   iv) Observe que $(t_n)_{n\geq 1}$ es convergente a cierto límite $\ell \in [0, 1]$ pero sin embargo la sucesión $(y(t_n))_{n\geq 1}$ no converge, contradiciendo la continuidad de y.

15. Pruebe que si $A, B \subseteq X$ son subespacios arco-conexos y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es arco-conexo.

16. Un espacio topológico X se dice *localmente arco-conexo* si para cada punto $x \in X$ y entorno $V \ni x$ existe un abierto arco-conexo U tal que $x \in U \subset V$.

a) Pruebe que si X es localmente arco-conexo y $U \subseteq X$ es abierto, entonces U es localmente arco-conexo.

b) Pruebe que si X es localmente arco-conexo y conexo, entonces es arco-conexo.

c) Concluya que si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces es conexo si y sólo si es arco-conexo.