Topología

Segundo cuatrimestre - 2022

Práctica 1

Espacios Topológicos

Ejemplos

1. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Muestre que
$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$
es una topología sobre Y. Llamamos a τ_Y la *topología inducida* por τ sobre Y o la *topología subespacio*.

2. Sean X un conjunto infinito, $x_0 \in X$ y $\tau \subseteq \mathscr{P}(X)$ el conjunto de las partes de X que tienen complemento finito o que no contienen a x_0. Muestre que τ es una topología y describa sus cerrados.

3. Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de todos los cerrados acotados de $\mathbb{R}$ en su topología usual, junto con $\mathbb{R}$. Pruebe que existe una topología en $\mathbb{R}$ para la cual $\mathscr{F}$ es el conjunto de todos los cerrados.

4. Decimos que un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es *radialmente abierto* si su intersección con toda recta que pasa por uno de sus puntos es un abierto de ésta. Muestre que el conjunto de todos los conjuntos radialmente abiertos de $\mathbb{R}^2$ es una topología sobre $\mathbb{R}^2$ y compárela con la topología usual.

Construcción de topologías

5. Sea X un conjunto. Un *sistema de filtros de entornos $\mathscr{F}$ en X* es una regla que a cada elemento $x \in X$ asigna una familia $\mathscr{F}_x \in \mathscr{P}(X)$ de manera que

   (A1) si $x \in X$, $\mathscr{F}_x \neq \emptyset$;

   (A2) si $x \in X$ y $A \in \mathscr{F}_x$, entonces $x \in A$;

   (A3) si $x \in X$, $A \in \mathscr{F}_x$ y $B \in \mathscr{P}(X)$ son tales que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathscr{F}_x$;

   (A4) si $x \in X$ y A, $B \in \mathscr{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathscr{F}_x$;

   (A5) si $x \in X$ y $A \in \mathscr{F}_x$, entonces existe $B \in \mathscr{F}_x$ tal que $B \subseteq A$ y $B \in \mathscr{F}_y$ para todo $y \in B$.

   Pruebe que:

   a) Si (X, τ) es un espacio topológico y para cada $x \in X$ definimos
   $$\mathscr{F}_x = \{A \in \mathscr{P}(X) : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\},$$
   entonces $\mathscr{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X.

   b) Si $\mathscr{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X y definimos
   $$\tau = \{A \in \mathscr{P}(X) : \text{para todo } x \in A \text{ es } A \in \mathscr{F}_x\} \cup \{\emptyset\},$$
   entonces τ es una topología sobre X.

   c) Las construcciones de los items a) y b) son inversas.

6. Sea X un conjunto. Una función $c : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ es un *operador de clausura en X* si

   (C1) $c(\emptyset) = \emptyset$;

   (C2) si $A \in \mathscr{P}(X)$, entonces $A \subseteq c(A)$;

   (C3) si $A \in \mathscr{P}(X)$, entonces $c(c(A)) = c(A)$;

   (C4) si $A, B \in \mathscr{P}(X)$, entonces $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$;

   Pruebe que

   a) Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la función
   $$c : A \in \mathscr{P}(X) \mapsto \overline{A} \in \mathscr{P}(X)$$
   es un operador de clausura en X.

   b) Si $c : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ es un operador de clausura en X, entonces el conjunto
   $$\tau = \{U \in \mathscr{P}(X) : c(X \setminus U) = X \setminus U\}$$
   es una topología sobre X.

   c) Las construcciones de los items a) y b) son inversas.

7. Sea X un conjunto y sea $B \subseteq X$. Pruebe que la función
   $$c : A \in \mathscr{P}(X) \mapsto \begin{cases} A \cup B \in \mathscr{P}(X) & \text{si } A \neq \emptyset \\ \emptyset \in \mathscr{P}(X) & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$
   es un operador de clausura en X. Describa los abiertos de la topología correspondiente.

Clausura, interior, frontera

8. Sea X un espacio topológico y sean $A, B \subseteq X$. Pruebe las siguientes inclusiones y decida cuáles pueden ser estrictas:

   a) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

   b) $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ cuando A es abierto;

   c) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$;

   d) $\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$;

   e) $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A^\circ \subseteq (\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A)^\circ$ y

   f) $(\bigcap_{A \in \mathscr{A}} A)^\circ \subseteq \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A^\circ$.

9. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Pruebe que:

   a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ$;

   b) $X \setminus \partial A = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$;

   c) $\overline{A} = A \cup \partial A$;

   d) $A^\circ = A \setminus \partial A$;

   e) A es abierto sii $A \cap \partial A = \emptyset$ y *f*) A es cerrado sii $\partial A \subseteq A$.

10. *Topología del complemento finito.* Sea X un conjunto y sea $\tau = \{U \in \mathscr{P}(X) : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Pruebe que τ es una topología sobre X. Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a esta topología.

11. Sean X un conjunto no vacío y $x_0 \in X$. Pruebe que:

    a) $\{U \in \mathscr{P}(X) : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre X.

    b) $\{U \in \mathscr{P}(X) : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$ es una topología sobre X.

    Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a cada una de estas topologías.

12. *El cuadrado ordenado.* Considere el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico y determine la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos de X:

    a) $\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,

    b) $\{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,

    c) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,

    d) $\{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,

    e) $\{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.

13. Pruebe que todo cerrado de $\mathbb{R}^2$ es la frontera de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Bases y sub-bases

14. Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de topologías en X. Pruebe que $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \tau_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \tau_\alpha$ una topología en X?

15. Sean X un conjunto y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Pruebe que existe una topología $\sigma(\mathscr{A})$ sobre X tal que

    - todo elemento de $\mathscr{A}$ es abierto para $\sigma(\mathscr{A})$, y
    - si τ es una topología sobre X tal que todo elemento de $\mathscr{A}$ es abierto para τ, entonces $\sigma(\mathscr{A}) \subseteq \tau$.

    En otras palabras, $\sigma(\mathscr{A})$ es la topología menos fina que contiene a $\mathscr{A}$ (la mínima en el orden dado por la inclusión). La topología $\sigma(\mathscr{A})$ es la *topología generada* por $\mathscr{A}$.

    Describa la topología generada por $\mathscr{A} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ sobre el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$.

16. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Consideremos $\mathscr{S} = \{S_x : x \in X\}$ y $\mathscr{R} = \{R_x : x \in X\}$, donde $S_x = \{y \in X : y < x\}$ y $R_x = \{y \in X : x < y\}$. Pruebe que $\mathscr{S} \cup \mathscr{R}$ es una sub-base para la topología del orden.

17. Considere las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:
    $\mathscr{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,
    $\mathscr{B}_2 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,
    $\mathscr{B}_3 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,
    $\mathscr{B}_4 = \mathscr{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathscr{B}_1\}$, donde $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
    $\mathscr{B}_5 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$,
    $\mathscr{B}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$,
    $\mathscr{B}_7 = \{B \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}$.

a) Muestre que cada uno de $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_7$ es una base para una topología en $\mathbb{R}$ y compare las topologías correspondientes.

b) Muestre que $\mathscr{B}_5 \cup \mathscr{B}_6$ es una sub-base para la topología generada por $\mathscr{B}_1$.

c) Determine la clausura del conjunto K en cada una de las siete topologías.

18. Sea $\mathscr{B} = \{(a,b) : a < b\} \cup \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Muestre que $\mathscr{B}$ es base de una topología sobre $\mathbb{R}$. Describa el interior de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con respecto a ella.

19. *Topología Zariski.* Considere $k[x] = k[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo k. Para cada subconjunto $S \subseteq k[x]$, se define el *conjunto algebraico* dado por S como

$$V(S) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in k^n : p(z_1, \ldots, z_n) = 0, \forall\ p \in S\}.$$

Verifique las siguientes propiedades:

a) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S.

b) $V(\{0\}) = k^n$ y $V(\{1\}) = \emptyset$. Si $S \subseteq T$, entonces $V(S) \supseteq V(T)$.

c) Si $I, J \subseteq k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

d) Si $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de ideales, entonces $V\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} V(I_\alpha)$.
Los items b), c) y d) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la *topología Zariski* de k^n.

e) Los conjuntos $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$ forman una base de dicha topología.

f) La topología Zariski en k es igual a la topología del complemento finito.

Redes

20. Sea (X, τ) un espacio topológico. Pruebe que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

a) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a la constante.

b) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x, entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

c) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

d) Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^\alpha)_{k\in\Gamma_\alpha}$ que converge a $x^\alpha \in X$, y que además $(x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a $x \in X$. Considere $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha\in\Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta\ \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \mapsto x^\alpha_{k_\alpha}$ converge a x.

21. Sea (X, τ) un espacio topológico. Pruebe que

$$\overline{A} = \{x \in X :\ \exists (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq A \text{ tal que } x_\alpha \to x\}.$$

22. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un *punto de acumulación* de la red si para todo $A \in \mathscr{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ. Pruebe que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x.

Sugerencia: para probar $\Rightarrow$), considere como conjunto dirigido el formado por los pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$ y U un entorno (abierto) de x que contiene a x_α.

Funciones continuas

23. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Pruebe que cada una de las siguientes condiciones sobre f es equivalente a que f sea continua:

    a) Para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathscr{F}_y$ $(y = f(x))$ existe $B \in \mathscr{F}_x$ tal que $f(B) \subseteq A$.

    b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq X$ tal que $x_\alpha \to x$ se tiene que $f(x_\alpha) \to f(x)$.

    c) Para todo $A \subseteq X$ se tiene $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

    d) Si $\mathscr{B}$ es una base para la topología de Y, entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathscr{B}$.

    e) Si $\mathscr{S}$ es una sub-base para la topología de Y, $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathscr{S}$.

24. Sean X un espacio topológico y $E \subseteq X$. Sea $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ la función característica de E, esto es,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

    Pruebe que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E.

25. *a*) Sean X, Y conjuntos ordenados con la topología del orden. Pruebe que si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.

    b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Pruebe que g es un homeomorfismo.

    c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

    Pruebe que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

26. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio X tal que $X = \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \to Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathscr{A}$.

    a) Pruebe que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.

    b) Pruebe que si $\mathscr{A}$ es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.

    c) Encuentre un ejemplo donde la colección $\mathscr{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.

    d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α. Muestre que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

27. Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas.

    a) Pruebe que el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

    b) Sea $h : X \to Y$ la función $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$. Pruebe que h es continua.