TOPOLOGÍA

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2022
ENTREGA 2: GRUPOS TOPOLÓGICOS

NOMBRE APELLIDO

Un *grupo topológico* G es un grupo dotado de una topología tal que las funciones

$$\mu\colon G \times G \to G, \qquad i\colon G \to G,$$
$$(x, y) \mapsto x \cdot y \qquad g \mapsto g^{-1}$$

sean continuas. Algunos ejemplos de grupos topológicos son $\mathbb{R}$ con la suma, S^1 como subgrupo de $\mathbb{C}^*$ con la multiplicación, y $GL(n, \mathbb{R})$ con la multiplicación de matrices, todos considerados con sus topologías usuales. Observemos también que un subgrupo de un grupo topológico es también un grupo topológico al equiparlo con la topología subespacio.

De aquí en más fijamos un grupo topológico G; notaremos 1 a su elemento neutro.

Ejercicio 1. *Pruebe que para cada $g \in G$ las funciones*

$$L_g\colon G \to G, \qquad R_g\colon G \to G,$$
$$x \mapsto g \cdot x \qquad x \mapsto x \cdot g$$

son homeomorfismos.

Ejercicio 2. *Sea $U \ni 1$ un abierto de G.*

i) *Pruebe que existe un abierto $V \ni 1$ tal que $V \cdot V \subseteq U$ y $V^{-1} = V$.*
ii) *Pruebe que un grupo topológico T_0 es T_2.*

Recordemos que el *índice* de un subgrupo $H \leq G$ es el cardinal del conjunto de coclases $[G : H] := \#G/H$.

Ejercicio 3. *Pruebe que si G es un grupo topológico compacto, entonces todo subgrupo abierto tiene índice finito.*