TOPOLOGÍA

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2022

ENTREGA 1: ESPACIOS TOPOLÓGICOS FINITOS

NOMBRE APELLIDO

Un *preorden* es un conjunto X junto con una relación reflexiva y transitiva $\leq \subseteq X \times X$. Decimos que dos elementos $x, y \in X$ son *comparables* si $x \leq y$ ó $y \leq x$.

Ejercicio 1. *Sea X un preorden finito. Para cada $x \in X$, sea $U_x = \{y \in X : y \leq x\}$. Probar que la familia*

$$\beta = \{U_x : x \in X\}$$

es una base para una topología en X. ¿Qué topología tiene el conjunto $\{0, 1\}$ si tomamos el orden $0 < 1$?

Ejercicio 2. *Sea (X, τ) un espacio topológico finito. Para cada $x \in X$, sea $U_x = \cap_{U \ni x \text{ abierto}} U$. Probar que la relación*

$$y \leq x \iff y \in U_x$$

define una estructura de preorden en X. ¿Qué estructura de preorden obtenemos si consideramos el espacio de Sierpiński?

Ejercicio 3. *Convencerse de que las construcciones de los Ejercicios 1 y 2 son inversas.*

En vista del Ejercicio 3, vamos a tratar a un preorden como espacio topológico con la topología del Ejercicio 1; recíprocamente hablaremos de un espacio finito como un preorden haciendo referencia al Ejercicio 2.

Ejercicio 4. *Sea X un espacio topológico finito y $x, y \in X$ tales que $x \leq y$. Probar que la función*

$$f : [0, 1] \to X, \qquad f(t) = \begin{cases} x & si\ t \in [0, 1) \\ y & si\ t = 1 \end{cases}$$

es continua.

El Ejercicio 4 nos dice en particular que los abiertos básicos U_x son siempre arcoconexos, para todo espacio finito. En consecuencia, los espacios finitos son conexos si y sólo si son arcoconexos.

Ejercicio 5. *Sea X un espacio finito. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *El espacio X es conexo.*
ii) *Dados $x, y \in X$, existen puntos $z_0 = x, z_1, \ldots, z_n = y \in X$ tales que z_i y z_{i+1} son comparables para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.*