EJEMPLO DE DOCUMENTO ESCRITO EN LATEX

Definición 1. La topología *profinita* de $\mathbb{Z}$ es la que tiene por base a

$$\beta := \{a\mathbb{Z} + b : a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{Z}\}.$$

Observación 2. Todo abierto no vacío de la topología profinita de $\mathbb{Z}$ es infinito, ya que contiene un abierto básico y estos son todos infinitos.

Vamos a considerar de ahora en más a $\mathbb{Z}$ con esta topología.

Lema 3. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$. El subconjunto $a\mathbb{Z} + b$ de $\mathbb{Z}$ es cerrado.*

Demostración. Basta notar que su complemento es abierto al ser unión de abiertos básicos,

$$a\mathbb{Z} + b = \bigcup_{0 \leq j \leq a,\ j \not\equiv b \pmod{a}} a\mathbb{Z} + j.$$

□

La siguiente demostración de la infinitud de los primos se debe a Furstenberg ([1]).

Teorema 4 (Euclides)**.** *Existen infinitos números primos.*

Demostración. Sea $\mathscr{P} = \{p \in \mathbb{Z} : p \text{ es primo}\}$. Como todo entero distinto de 1 y -1 es divisible por un primo, podemos escribir

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathscr{P}} p\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Cada uniendo del lado derecho de la igualdad (5) es cerrado, por el Lema 3. Si $\mathscr{P}$ fuese finito, se tendría entonces que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ es cerrado. En otras palabras, el conjunto $\{-1, 1\}$ sería abierto, contradiciendo la Observación 2. Esto concluye la prueba. □

Referencias

[1] Harry Furstenberg, *On the infinitude of primes*, Amer. Math. Monthly **62** (1955), 353, DOI 10.2307/2307043.